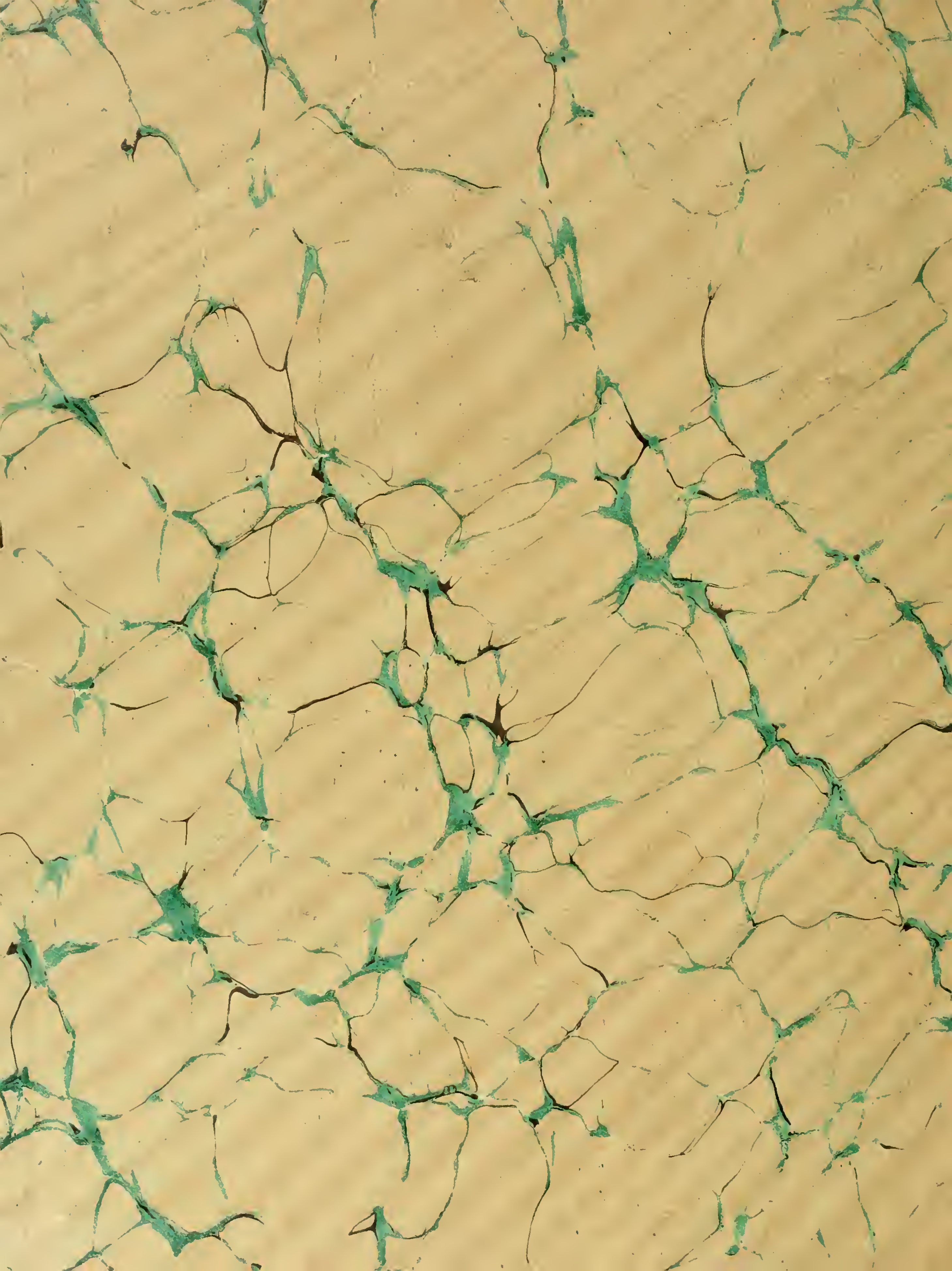
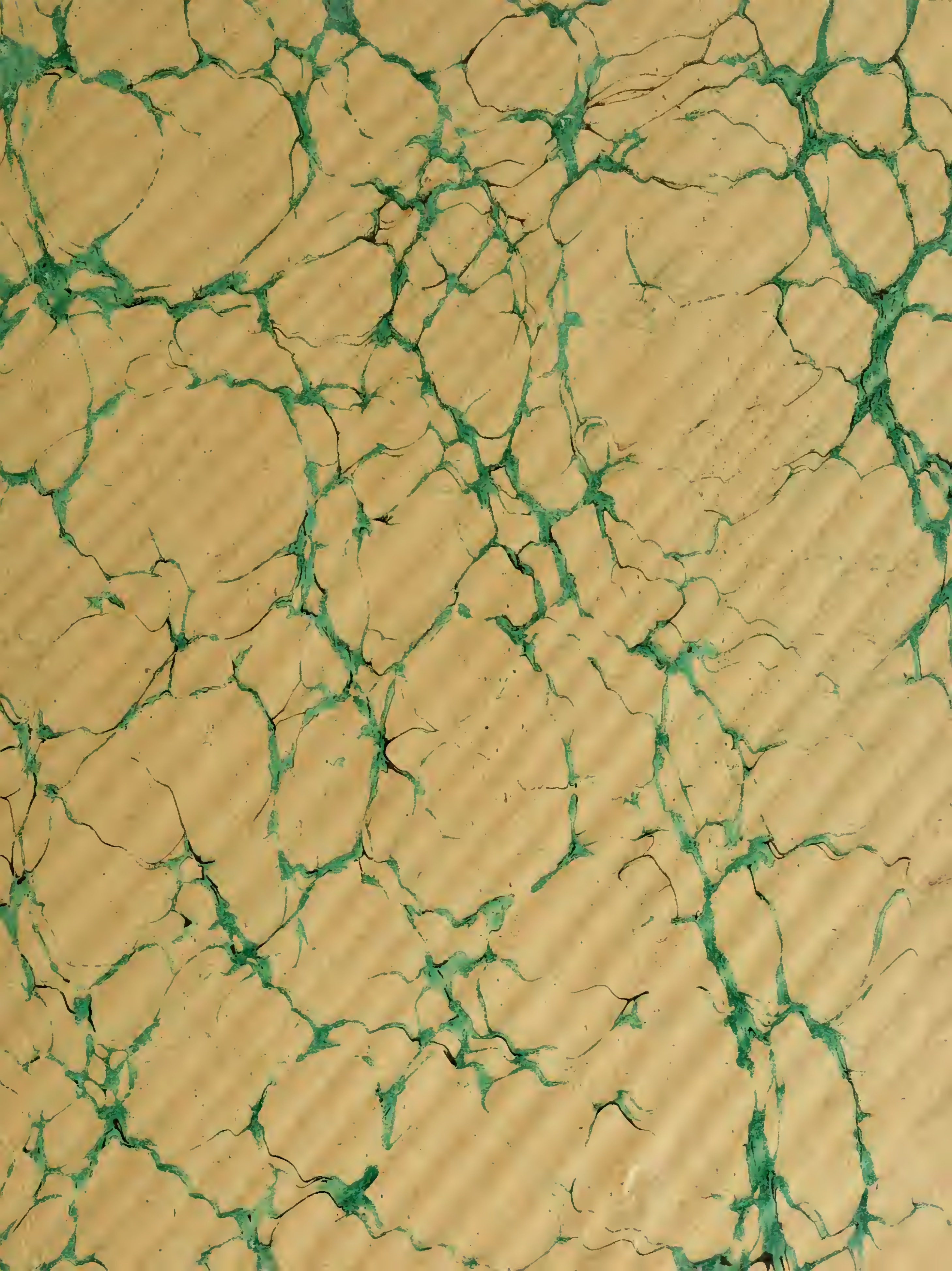






JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

TROISIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE,

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS SAVANTS.

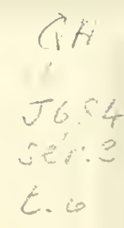
TOME SIXIÈME. — ANNÉE 1880.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1880



JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur une formule d'Euler;

Par M. HERMITE.

Une Lettre de M. Fuss, publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux (mai 1879, p. 226), contient sur l'intégrale $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}dx$ un résultat obtenu par Euler et qui est bien digne de remarque. Il consiste dans la réduction de cette quantité à l'intégrale d'une fonction rationnelle au moyen de la substitution

$$y = \frac{\sqrt{1+p^2} + \sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}},$$

et c'est, je crois, le seul exemple qui ait été donné d'une telle transformation pour une expression dépendant des intégrales elliptiques.

Je me suis proposé, en étudiant ce résultat d'Euler, de reconnaître

s'il tient à la valeur particulière du module propre à l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, ou si, étant d'une nature plus générale, il ne mettrait point sur la trace d'une catégorie de formules $\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}$ réductibles par une substitution algébrique à l'intégrale des fonctions rationnelles. C'est en effet ce qui a lieu, comme on va le voir par l'analyse suivante, qui est très facile.

I. Je rattacherai d'abord la forme analytique de la substitution d'Euler à la relation

$$p = \frac{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}{x\sqrt{2}},$$

d'où se tire l'équation

$$Ax^4 + 2(B-p^2)x^2 + C = 0,$$

puis la valeur

$$x^2 = \frac{p^2 - B + \sqrt{p^4 - 2Bp^2 + B^2 - AC}}{A},$$

et enfin, par l'application des formules connues,

$$x = \frac{\sqrt{p^2 - B + \sqrt{AC}} + \sqrt{p^2 - B - \sqrt{AC}}}{\sqrt{2A}}.$$

On voit en effet que, en prenant $Ax^4 + 2Bx^2 + C = x^4 + 1$, il suffit de changer p en $\frac{1}{p}$ pour obtenir l'expression

$$x = \frac{\sqrt{p^2+1} + \sqrt{p^2-1}}{p\sqrt{2}}.$$

Je remarque ensuite que dans l'équation du second degré en x^2, le produit des racines étant $\frac{C}{A}$, on a en même temps

$$x^2 = \frac{p^2 - B + \sqrt{p^4 - 2Bp^2 + B^2 - AC}}{A},$$

et

$$\frac{C}{Ax^2} = \frac{p^2 - B - \sqrt{p^4 - 2Bp^2 + B^2 - AC}}{A}.$$

Par conséquent, toute fonction rationnelle $f(x^2)$ telle qu'on ait

$$f(x^2)=f\left(\frac{C}{Ax^2}\right)$$

s'exprimera rationnellement au moyen de la variable p, et, si l'on remplace cette condition par la suivante,

$$f(x^2)=-f\left(\frac{C}{Ax^2}\right),$$

on aura

$$f(x^2)=\varphi(p)\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC},$$

$\varphi(p)$ étant encore rationnelle en p. Ainsi nous trouverons, par exemple,

$$Ax^2-\frac{C}{x^2}=2\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC},$$

de sorte que, la différentiation de l'équation

$$p=\frac{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}{x\sqrt{2}},$$

donnant

$$\frac{dp}{dx}=\frac{Ax^4-C}{x^2\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}\sqrt{2}},$$

nous pourrons écrire

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC}}{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}},$$

ou bien

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{dp}{\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC}}.$$

Maintenant, il suffit de multiplier membre à membre avec l'équation

$$f(x^2)=\varphi(p)\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC}$$

pour obtenir

$$\frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(p)dp.$$

L'intégrale $\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}$, où $f(x^2)$ est telle qu'on ait

$$f(x^2) = -f\left(\frac{C}{Ax^2}\right),$$

est donc ramenée par la substitution considérée à celle des fonctions rationnelles. En particulier, on aura

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int p^2\,dp = -\frac{p^3}{3\sqrt{2}},$$

c'est-à-dire la formule d'Euler.

II. La méthode d'intégration des fonctions doublement périodiques qu'on tire de la décomposition en éléments simples de ces fonctions conduit par une autre voie au résultat que nous venons d'obtenir.

Supposons, en effet,

$$Ax^4+2Bx^2+C = (1-x^2)(1-k^2x^2),$$

et soient $x = \operatorname{sn}\xi$, puis $f(x^2) = F(\xi)$, de sorte qu'on ait

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int F(\xi)\,d\xi.$$

La condition que doit vérifier $f(x^2)$ devenant

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),$$

on voit que la fonction $F(\xi)$, qui a pour périodes $2K$ et $2iK'$, satisfait à l'égalité

$$F(\xi+iK') = -F(\xi).$$

Cela étant, je dis qu'à l'égard d'une telle fonction on peut prendre pour élément simple la quantité $D_\xi \log \operatorname{sn}\xi = \frac{\operatorname{cn}\xi\,\operatorname{dn}\xi}{\operatorname{sn}\xi}$.

Nous avons d'abord

$$D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi + 2K) = + D_\xi \log \operatorname{sn} \xi,$$
$$D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi + iK') = - D_\xi \log \operatorname{sn} \xi,$$

et il est aisé de voir qu'à l'intérieur d'un rectangle renfermant l'origine des coordonnées, et dont les côtés parallèles aux axes des abscisses et ordonnées sont $2K$ et K', il n'existe que le seul pôle $\xi = 0$. Tous les pôles de la fonction, étant, en effet, les racines des équations $H(\xi) = 0$, $\Theta(\xi) = 0$, ont pour expressions

$$\xi = 2mK + 2m'iK',$$
$$\xi = 2mK + (2m' + 1)iK'.$$

Or il est clair que, pour les valeurs entières de m et m', ces formules, à l'exception du pôle $\xi = 0$, représentent des points extérieurs au rectangle. Cela étant, il suffit, en raisonnant comme je l'ai déjà fait ailleurs, d'égaler à zéro la somme des résidus de la fonction doublement périodique

$$F(z) D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi - z),$$

dont les périodes sont $2K$ et iK', pour arriver à la formule suivante :

$$F(\xi) = \Sigma[A D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi - a) + A_1 D_\xi^2 \log \operatorname{sn}(\xi - a) + \ldots$$
$$+ A_n D_\xi^{n+1} \log \operatorname{sn}(\xi - a)].$$

Le signe Σ se rapporte à tous les pôles de la fonction $F(\xi)$ qui sont à l'intérieur du rectangle considéré, et l'on suppose, pour l'un quelconque de ces pôles, $\xi = a$, la relation

$$F(a + \varepsilon) = A \frac{1}{\varepsilon} + A_1 D_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} + \ldots + A_n D_\varepsilon^n \frac{1}{\varepsilon},$$

en se bornant à la partie principale du développement.

Cette expression de $F(\xi)$ donne immédiatement

$$\int F(\xi)\, d\xi = \Sigma[A \log \operatorname{sn}(\xi - a) + A_1 D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi - a) + \ldots$$
$$+ A_n D_n \log \operatorname{sn}(\xi - a)],$$

et il est aisé de voir que, dans le cas spécial auquel nous avons été amené, où l'on a $F(\xi) = f(\mathrm{sn}^2\xi)$ et par conséquent $F(-\xi) = F(\xi)$, les quantités placées sous les signes logarithmiques, ainsi que les autres termes du second membre, s'expriment rationnellement par la variable $p = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x\sqrt{2}}$ ou bien $p = \frac{\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi}{\mathrm{sn}\,\xi}$, en mettant $\frac{1}{\sqrt{2}}p$ au lieu de p. En effet, l'intégrale étant une fonction impaire, nous pouvons écrire, en changeant ξ en $-\xi$,

$$-\int F(\xi)d\xi = \Sigma[\mathrm{A}\log\mathrm{sn}(\xi+a) - \mathrm{A}_1\mathrm{D}_\xi\log\mathrm{sn}(\xi+a) + \ldots \\ \pm \mathrm{A}_n\mathrm{D}_\xi^n\log\mathrm{sn}(\xi+a)],$$

et cette équation, retranchée de la précédente, donne

$$\begin{aligned} 2\int F(\xi)d\xi = {} & \Sigma\mathrm{A}\log\frac{\mathrm{sn}(\xi-a)}{\mathrm{sn}(\xi+a)} \\ & + \Sigma\mathrm{A}_1\mathrm{D}_\xi\log\mathrm{sn}(\xi-a)\,\mathrm{sn}(\xi+a) \\ & + \Sigma\mathrm{A}_2\mathrm{D}_\xi\log\frac{\mathrm{sn}(\xi-a)}{\mathrm{sn}(\xi+a)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dans cette nouvelle formule figurent les dérivées successives d'ordre pair de deux fonctions différentes, $\log\frac{\mathrm{sn}(\xi-a)}{\mathrm{sn}(\xi+a)}$ et $\mathrm{D}_\xi\log\mathrm{sn}(\xi-a)\,\mathrm{sn}(\xi+a)$, qui l'une et l'autre d'abord s'expriment comme il suit en p. On a, en effet,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{sn}(\xi-a)}{\mathrm{sn}(\xi+a)} &= \frac{\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a - \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi}{\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi} \\ &= \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a - p\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\;p + \mathrm{sn}\,a}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_\xi\log\mathrm{sn}(\xi-a)\,\mathrm{sn}(\xi+a) &= \frac{2\,\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi\,(1-k^2\mathrm{sn}^4 a)}{(1-k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2\xi)(\mathrm{sn}^2\xi - \mathrm{sn}^2 a)} \\ &= \frac{2(1-k^2\mathrm{sn}^4 a)}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 a - p^2\mathrm{sn}^2 a}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant qu'en différentiant deux fois une relation de la forme

$$f(\xi) = \varphi(p)$$

on en tire

$$f''(\xi) = \varphi''(p)\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2 + \varphi'(p)\frac{d^2p}{d\xi^2},$$

et qu'on a

$$\frac{dp}{d\xi} = k^2 \operatorname{sn}^2\xi - \frac{1}{\operatorname{sn}^2\xi} = \sqrt{(1 + k^2 + p^2)^2 - 4k^2},$$

$$\frac{d^2p}{d\xi^2} = 2\operatorname{cn}\xi \operatorname{dn}\xi\left(k^2 \operatorname{sn}\xi + \frac{1}{\operatorname{sn}^3\xi}\right)$$

$$= 2p\left(k^2 \operatorname{sn}^2\xi + \frac{1}{\operatorname{sn}^2\xi}\right) = \frac{2p(1 + k^2 - p^2)}{k^2};$$

par conséquent, $f''(\xi)$, puis, de proche en proche, toutes les dérivées d'ordre pair, seront des fonctions rationnelles de p. L'intégrale s'exprime donc rationnellement au moyen de cette variable, comme nous avons voulu le montrer.

III. La formule de décomposition en éléments simples qui vient d'être obtenue,

$$\mathrm{F}(\xi) = \Sigma[\mathrm{A}\mathrm{D}_\xi \log \operatorname{sn}(\xi - a)$$
$$+ \mathrm{A}_1 \mathrm{D}_\xi^2 \log \operatorname{sn}(\xi - a) + \ldots + \mathrm{A}_n \mathrm{D}_\xi^{n-1} \log \operatorname{sn}(\xi - a)],$$

d'une fonction satisfaisant aux conditions

$$\mathrm{F}(\xi + 2\mathrm{K}) = +\mathrm{F}(\xi),$$
$$\mathrm{F}(\xi + i\mathrm{K}') = -\mathrm{F}(\xi),$$

peut être regardée comme appartenant à la théorie générale des fonctions doublement périodiques. Sous ce point de vue, il est visible qu'elle constitue seulement une des trois formules d'un même système, dans lequel les quantités

$$\mathrm{D}_\xi \log \operatorname{sn}\xi,\quad \mathrm{D}_\xi \log \operatorname{cn}\xi,\quad \mathrm{D}_\xi \log \operatorname{dn}\xi$$

jouent successivement le rôle d'éléments simples. Je vais établir succinctement les deux autres, qui concernent deux nouveaux types de fonctions doublement périodiques, $\mathrm{F}_1(\xi)$ et $\mathrm{F}_2(\xi)$, caractérisées par les

conditions suivantes :

$$F_1(\xi + K + iK') = - F_1(\xi),$$
$$F_1(\xi + K - iK') = - F_1(\xi),$$

puis

$$F_2(\xi + \quad K) = - F_2(\xi),$$
$$F_2(\xi + 2iK') = + F_2(\xi).$$

Elles se lient en effet à l'étude de la substitution d'Euler, qu'elles nous conduiront, comme on le verra, à étendre et généraliser d'une nouvelle manière.

Je me fonderai, à cet effet, sur les équations élémentaires

$$\operatorname{cn}(z + K + iK') = - \frac{ik'}{k} \frac{1}{\operatorname{cn} z},$$
$$\operatorname{cn}(z + K - iK') = + \frac{ik'}{k} \frac{1}{\operatorname{cn} z}$$

et

$$\operatorname{dn}(z + K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} z},$$
$$\operatorname{dn}(z + 2iK') = - \operatorname{dn} z,$$

qui conduisent aux formules suivantes :

$$D_z \log \operatorname{cn}(z + K + iK') = - D_z \log \operatorname{cn} z,$$
$$D_z \log \operatorname{cn}(z + K - iK') = - D_z \log \operatorname{cn} z,$$

puis

$$D_z \log \operatorname{dn}(z + \quad K) = - D_z \log \operatorname{dn} z,$$
$$D_z \log \operatorname{dn}(z + 2iK') = + D_z \log \operatorname{dn} z.$$

Cela posé, j'observe d'abord, à l'égard de la quantité

$$D_z \log \operatorname{cn}(z + K) = - \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z},$$

que les pôles donnés par les racines des équations

$$H(z) = 0, \quad \Theta_1(z) = 0$$

sont

$$z = 2mK + 2m'iK',$$
$$z = (2m+1)K + (2m'+1)iK'.$$

Je remarque aussi que le parallélogramme ou plutôt le losange dont les sommets, ayant pour affixes

$$0,\quad K - iK',\quad 2K,\quad K + iK',$$

sont par conséquent tous des pôles ne renferme à son intérieur aucun autre de ces points. Cela posé, qu'on déplace ce losange de manière à lui faire contenir l'origine des coordonnées, les trois autres pôles, qui étaient des sommets, se trouveront en dehors de la figure, et l'on voit qu'à l'intérieur du losange la fonction $D_z \log \operatorname{cn}(z+K)$ a un seul et unique pôle $z = 0$. On verra aussi, relativement à la quantité $D_z \log \operatorname{dn}(z + K + iK')$, qu'elle n'a pareillement que le pôle $z = 0$ à l'intérieur d'un rectangle contenant l'origine et dont les côtés parallèles aux axes coordonnés sont K et $2K'$. Cela établi, nous formerons ces deux expressions

$$F_1(z) D_\xi \log \operatorname{cn}(\xi + K - z),$$
$$F_2(z) D_\xi \log \operatorname{dn}(\xi + K + iK' - z),$$

qui sont doublement périodiques, la première ayant pour périodes $K + iK'$, $K - iK'$, et la seconde K et $2iK'$.

En égalant à zéro la somme de leurs résidus correspondant aux pôles qu'elles possèdent, la première à l'intérieur du losange, la seconde à l'intérieur du rectangle des périodes, on parvient aux formules suivantes, où l'on a mis dans les premiers membres $\xi - K$ et $\xi - K - iK'$ au lieu de ξ, à savoir :

$$F_1(\xi - K) = \Sigma[A' D_\xi \log \operatorname{cn}(\xi - a) + A'_1 D_\xi^2 \log \operatorname{cn}(\xi - a) + \ldots$$
$$+ A'_n D_\xi^{n+1} \log \operatorname{cn}(\xi - a)],$$
$$F_2(\xi - K - iK') = \Sigma[A'' D_\xi \log \operatorname{dn}(\xi - a) + A''_1 D_\xi^2 \log \operatorname{dn}(\xi - a) + \ldots$$
$$+ A''_n D_\xi^{n+1} \log \operatorname{dn}(\xi - a)].$$

Dans ces relations, on a continué de désigner par $\xi = a$ l'un quel-

conque des pôles des deux fonctions; on a supposé encore

$$F_1(a+\varepsilon) = A' \frac{1}{\varepsilon} + A'_1 D_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} + \ldots + A'_n D_\varepsilon^n \frac{1}{\varepsilon},$$

et de même

$$F_2(a+\varepsilon) = A'' \frac{1}{\varepsilon} + A''_1 D_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} + \ldots + A''_n D_\varepsilon^n \frac{1}{\varepsilon},$$

en se bornant à la partie principale des développements. Elles s'écriraient plus simplement en représentant les pôles de $F_1(\xi)$ par $a + K$ et ceux de $F_2(\xi)$ par $a + K + iK'$; nous aurions, en effet,

$$\begin{aligned} F_1(\xi) = \Sigma[&A' D_\xi \log \mathrm{cn}(\xi - a) + A'_1 D_\xi^2 \log \mathrm{cn}(\xi - a) + \ldots \\ &+ A'_n D_\xi^{n+1} \log \mathrm{cn}(\xi - a)], \\ F_2(\xi) = \Sigma[&A'' D_\xi \log \mathrm{dn}(\xi - a) + A''_1 D_\xi^2 \log \mathrm{dn}(\xi - a) + \ldots \\ &+ A''_n D_\xi^{n+1} \log \mathrm{dn}(\xi - a)]. \end{aligned}$$

On en déduit, en intégrant par rapport à ξ,

$$\begin{aligned} \int F_1(\xi)\,d\xi = \Sigma[&A' \log \mathrm{cn}(\xi - a) + A'_1 D_\xi \log \mathrm{cn}(\xi - a) + \ldots \\ &+ A'_n D_\xi^n \log \mathrm{cn}(\xi - a)], \\ \int F_2(\xi)\,d\xi = \Sigma[&A'' \log \mathrm{dn}(\xi - a) + A''_1 D_\xi \log \mathrm{dn}(\xi - a) + \ldots \\ &+ A''_n D_\xi^n \log \mathrm{dn}(\xi - a)], \end{aligned}$$

et de ces expressions nous allons tirer des conséquences analogues à celles que nous a données la formule

$$\begin{aligned} \int F(\xi)\,d\xi = \Sigma[&A \log \mathrm{sn}(\xi - a) + A_1 D_\xi \log \mathrm{sn}(\xi - a) + \ldots \\ &+ A_n D_\xi^n \log \mathrm{sn}(\xi - a)]. \end{aligned}$$

IV. Introduisant, à cet effet, les conditions

$$\begin{aligned} F_1(-\xi) &= F_1(\xi), \\ F_2(-\xi) &= F_2(\xi), \end{aligned}$$

et posant successivement

$$p = \frac{\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi}{\mathrm{cn}\,\xi},$$

$$p = \frac{\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{cn}\,\xi}{\mathrm{dn}\,\xi},$$

on démontrera exactement, comme au § II, que les quantités placées sous les logarithmes, ainsi que les autres termes des seconds membres, s'expriment rationnellement au moyen des variables p. Soit donc, comme nous l'avons fait en commençant,

$$x = \operatorname{sn}\xi;$$

posons également

$$F_1(\xi) = f_1(x^2),$$
$$F_2(\xi) = f_2(x^2),$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions rationnelles de x^2, de sorte qu'on ait

$$\int F_1(\xi)\,d\xi = \int \frac{f_1(x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx,$$
$$\int F_2(\xi)\,d\xi = \int \frac{f_2(x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx.$$

Nous nous trouvons amené à cette conséquence que les substitutions

$$p = \frac{\operatorname{sn}\xi \operatorname{dn}\xi}{\operatorname{cn}\xi} = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$p = \frac{\operatorname{sn}\xi \operatorname{cn}\xi}{\operatorname{dn}\xi} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

ramènent ces intégrales à celles des fonctions rationnelles en p.

C'est ce que nous allons démontrer directement, mais auparavant nous tirerons des caractéristiques relatives à la périodicité de $F_1(\xi)$ et $F_2(\xi)$ les propriétés algébriques correspondantes des fonctions $f_1(x^2)$ et $f_2(x^2)$.

Recourant, à cet effet, aux formules

$$\operatorname{sn}(\xi + K + iK') = \frac{\operatorname{dn}\xi}{k \operatorname{cn}\xi},$$
$$\operatorname{sn}(\xi + K) = \frac{\operatorname{cn}\xi}{\operatorname{dn}\xi},$$

qui donnent

$$\operatorname{sn}^2(\xi + K + iK') = \frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)},$$
$$\operatorname{sn}^2(\xi + K) = \frac{1-x^2}{1-k^2x^2},$$

nous en concluons les deux équations

$$f_1(x^2) = -f_1\left[\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right],$$

$$f_2(x^2) = -f_2\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right).$$

Considérant maintenant, pour fixer les idées, la seule intégrale $\int \frac{f_1(x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx$, je tire d'abord de la substitution qui la concerne l'équation

$$k^2x^4 - (p^2+1)x^2 + p^2 = 0,$$

d'où la formule

$$x^2 = \frac{p^2+1+\sqrt{p^4-2(2k^2-1)p^2+1}}{2k^2}.$$

Je remarque ensuite que, la seconde racine étant $\frac{p^2}{k^2x^2}$ ou bien $\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}$, nous pouvons écrire

$$\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)} = \frac{p^2+1-\sqrt{p^4-2(2k^2-1)p^2+1}}{2k^2}.$$

De la propriété de la fonction $f_1(x^2)$ résulte donc qu'elle prend des valeurs égales et de signes contraires lorsqu'on y remplace x^2 par ces deux expressions, de sorte qu'on peut poser

$$f_1(x^2) = \varphi(p)\sqrt{p^4-2(2k^2-1)p^2+1},$$

en désignant par $\varphi(p)$ une fonction rationnelle de p. En multipliant membre à membre avec l'équation suivante,

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\frac{dp}{\sqrt{p^4-2(2k^2-1)p^2+1}},$$

qui se trouve facilement, on obtient, après avoir intégré les deux membres,

$$\int \frac{f_1(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\int \varphi(p)\,dp.$$

La proposition que nous voulions établir se trouve ainsi démontrée,

et il est évident que la seconde intégrale $\int \frac{f_2(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ conduirait exactement au même calcul. En résumé, on voit que les trois quantités

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{f_1(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{f_2(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où les fonctions rationnelles f, f_1, f_2 satisfont aux conditions

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),$$

$$f_1(x^2) = -f_1\left[\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right],$$

$$f_2(x^2) = -f_2\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right),$$

se ramènent, si l'on fait successivement

$$p = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x},$$

$$p = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$p = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

à l'intégration des fonctions rationnelles; et comme on tire de ces relations

$$x = \frac{\sqrt{p^2+(k+1)^2}+\sqrt{p^2+(k-1)^2}}{2k},$$

$$x = \frac{\sqrt{p^2+2kp+1}+\sqrt{p^2-2kp+1}}{2k},$$

$$x = \frac{\sqrt{k^2p^2+2p+1}+\sqrt{k^2p^2-2p+1}}{2},$$

nous voyons aussi que le type analytique de la substitution qu'Euler a découverte et appliquée à l'intégrale particulière $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$ se conserve en ne subissant qu'une modification légère pour s'appliquer à des cas plus généraux et plus étendus.

V. Les formules de décomposition en éléments simples des fonc-

tions doublement périodiques désignées par $F(\xi)$, $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ sont susceptibles de beaucoup d'applications. Si l'on désigne par m un nombre entier, on verra facilement qu'on peut faire

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \operatorname{cn}(4m+2)\xi, \quad \operatorname{dn}(4m+2)\xi,\\
F_1(\xi) &= \operatorname{sn}(4m+2)\xi, \quad \operatorname{dn}(4m+2)\xi,\\
F_2(\xi) &= \operatorname{sn}(4m+2)\xi, \quad \operatorname{cn}(4m+2)\xi,
\end{aligned}$$

et l'on observera que la même quantité, $\operatorname{sn}(4m+2)\xi$ par exemple, possède à la fois la périodicité de $F_2(\xi)$ et $F_3(\xi)$. Je n'entrerai point maintenant dans le détail de ces applications et je terminerai cette étude par la remarque suivante. La transformation $p = \frac{\operatorname{cn}\xi \operatorname{dn}\xi}{\operatorname{sn}\xi}$, qui ramène à l'intégrale des fonctions rationnelles, $\int F(\xi)\,d\xi$, ne contenant rien qui se rapporte à la fonction $F(\xi)$, sera donc la même par exemple pour les deux quantités $\int \operatorname{cn} 2\xi\,d\xi$ et $\int \operatorname{dn} 2\xi\,d\xi$. Or, elles deviennent $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1-k^2z^2}}$ et $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ si l'on fait $\operatorname{sn} 2\xi = z$; par conséquent, on ramènera à la fois ces deux intégrales à celles des fonctions rationnelles en exprimant z au moyen de la variable p. On trouve facilement

$$z = \frac{2p}{\sqrt{p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2}},$$

puis ces relations

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-z^2} &= \frac{p^2-1+k^2}{\sqrt{p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2}},\\
\sqrt{1-k^2z^2} &= \frac{p^2+1-k^2}{\sqrt{p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2}},\\
dz &= 2\,\frac{(1-k^2)^2-p^4}{[p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dp,
\end{aligned}$$

et l'on en tire bien les réductions annoncées :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{\sqrt{1-k^2z^2}} &= -2\int \frac{p^2-1+k^2}{p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2}\,dp,\\
\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} &= -2\int \frac{p^2+1-k^2}{p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2}\,dp.
\end{aligned}$$

Sur le parallélogramme de Watt ;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN,

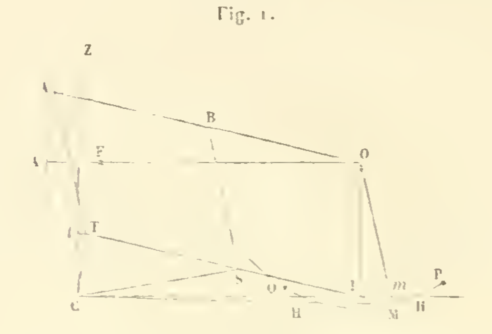
Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Considérons un balancier relié à la tige d'un piston par un parallélogramme articulé, et supposons aux diverses pièces du mécanisme les dimensions relatives que Watt avait adoptées et qu'on doit toujours rechercher. On peut très facilement, à l'aide d'une remarque simple, calculer la déviation de l'extrémité de la tige, et démontrer les règles que M. Tchebicheff a déduites d'une analyse générale, et qui permettent de réduire la déviation de près des deux tiers. Prony a calculé la déviation dans un cas particulier, mais les données dont il s'est servi sont rapportées dans plusieurs Ouvrages de manière à rendre le résultat inexact ; je préciserai les éléments de ce calcul numérique. Quant aux dispositions indiquées par M. Tchebicheff, elles devraient être adoptées dans la pratique, puisqu'elles augmentent la précision de l'ingénieux appareil de Watt sans en compliquer la construction.

Soient, à un instant quelconque, OA le balancier, mobile autour de son centre O, T l'extrémité de la tige du piston, CS le contre-balancier qui joint le point fixe C au sommet S du parallélogramme articulé ABST, CZ une verticale suivant laquelle on voudrait guider le point T. Si l'on prolonge le côté TS d'une longueur égale SM, le point M sera sur un cercle ayant O pour centre et AT ou BS pour rayon ; ce cercle est coupé en H et H' par l'horizontale du point C.

Désignons (*fig.* 1) par a les longueurs OB, BA, CS, que Watt prenait égales entre elles, par R le rayon OM = AT, par x l'angle de OM

Fig. 1.



avec la verticale OI, par α les angles HOI, H'OI, enfin par β la demi-amplitude d'oscillation du balancier OA.

Menons les droites CM et CT. Je puis remarquer que le triangle TCM est rectangle en C, parce que la médiane CS est égale à la moitié du côté TM = $2a$; si donc des points M et T j'abaisse Mm, Tt perpendiculaires, la première sur CH, la seconde sur CZ, les triangles TCt, MCm seront semblables, et l'on aura pour la déviation

$$(1) \qquad \delta = \mathrm{T}t = \frac{\mathrm{CT}}{\mathrm{CM}}\mathrm{M}m.$$

On peut, presque en toute rigueur, prendre Cm pour CM, et écrire

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{CM} &= \mathrm{CI} + \mathrm{R}\sin x, \\ \mathrm{CT} &= \sqrt{4a^2 - (\mathrm{CI} + \mathrm{R}\sin x)^2}, \\ \mathrm{M}m &= \mathrm{R}(\cos x - \cos\alpha). \end{aligned} \right.$$

Quand le balancier exécute une oscillation, l'extrémité A décrit un arc de cercle dont la flèche est l'horizontale A'F; nous supposerons d'abord, avec Watt, que CZ soit perpendiculaire au milieu de A'F, et que, lorsque le balancier est dirigé suivant OA', le point T coïncide avec C, et TM avec CH; dans ce cas,

$$\mathrm{CI} = 2a - \mathrm{R}\sin\alpha;$$

les valeurs de CM et de CT deviennent

$$\mathrm{CM} = 2a - \mathrm{R}(\sin\alpha - \sin x),$$
$$\mathrm{CT} = \sqrt{\mathrm{R}(\sin\alpha - \sin x)[4a - \mathrm{R}(\sin\alpha - \sin x)]},$$

et, en les substituant, ainsi que celle de Mm, dans l'équation (1), il vient

$$(3) \qquad \delta = \frac{\mathrm{R}(\cos x - \cos\alpha)\sqrt{\mathrm{R}(\sin\alpha - \sin x)[4a - \mathrm{R}(\sin\alpha - \sin x)]}}{2a - \mathrm{R}(\sin\alpha - \sin x)}.$$

Dans la pratique, $\mathrm{R}(\sin\alpha - \sin x)$ est beaucoup plus petit que $2a$, et l'on peut prendre pour valeur approchée de la déviation

$$\delta = (\cos x - \cos\alpha)\sqrt{\sin\alpha - \sin x}\sqrt{\frac{\mathrm{R}^3}{a}}.$$

Supposons que le balancier OA s'élève à partir de sa position moyenne pour accomplir une demi-oscillation; AT, d'abord parallèle à OH, se rapproche de la direction verticale pour la dépasser et finit par devenir parallèle à OH', x varie de α à $-\alpha$; pour chercher le maximum de δ, j'y remplace les sinus et cosinus par les premiers termes de leurs développements en série, et je considère le carré de la partie variable de δ, soit

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}(\alpha^2 - x^2)^2(\alpha - x) = \tfrac{1}{4}(\alpha - x)^3(\alpha + x)^2.$$

Pour $x = -\frac{\alpha}{5}$, ε atteint son maximum $4 \times 6^3\left(\frac{\alpha}{5}\right)^5$: la déviation correspondante est

$$\delta_1 = \frac{12}{25}\mathrm{R}\alpha^2\sqrt{\frac{6\mathrm{R}\alpha}{5a}};$$

mais on voit facilement que HH' est égal à la flèche A'F,

$$2\mathrm{R}\sin\alpha = 2a(1 - \cos\theta) = 4a\sin^2\tfrac{1}{2}\theta;$$

on en conclut la valeur de $\mathrm{R}\sin\alpha$, qui est sensiblement égale à $\mathrm{R}\alpha$, et,

en substituant dans δ_1, on a pour valeur approchée de la déviation maximum

$$(4)\qquad \delta_1 = \frac{96}{25}\frac{a^2}{R}\sqrt{\frac{3}{5}}\sin^5\frac{1}{2}\theta = 2,974\frac{a^2}{R}\sin^5\frac{1}{2}\theta.$$

Dans l'exemple numérique dont j'ai parlé, on donne $2^m,515$ pour la longueur du balancier, $0^m,762$ pour les côtés AT, BS, et $35°\,11'$ pour l'amplitude d'oscillation; si ces nombres représentent les quantités désignées par $2a$, R, 2θ, la formule (4) donne pour déviation maximum $0^m,000516$; pour que la déviation fût de 2^{mm}, comme l'indique Prony, il faudrait que $2^m,515$ représentât $OB = a$, et non OA, ce qui donnerait au parallélogramme une forme plus allongée que celle que Watt adoptait. Avec les données que je prends, α est égal à $0,077$, ou à $4°26'$; et si l'on se sert de la formule (3) pour calculer δ_1, on trouve pour cette déviation une valeur supérieure de $\frac{1}{48}$ à celle que donne l'équation (4), soit $\delta_1 = 0,000527$.

Cherchons maintenant si, en conservant l'égalité des droites OB, BA, CS, on n'aurait pas quelque avantage à placer CZ un peu plus près du point O que ne le faisait Watt. Dans ce cas, quand le côté TS coïncidera avec CS, le point M devra aller sur le cercle O jusqu'à une position P à droite de H, et telle que $CP = 2a$; alors le balancier, toujours parallèle à TM, ne sera pas exactement dans sa position moyenne, mais fera avec l'horizon un très petit angle. Supposons qu'à partir de cette époque l'extrémité A s'élève; l'articulation S s'élèvera aussi, et le point M se déplacera sur son arc de cercle à gauche de P; la relation (1) étant toujours vraie, on voit que la déviation, nulle quand M est en P, se fait d'abord à gauche de CZ, redevient nulle quand M passe en H, puis a lieu à droite de CZ, pour s'annuler une troisième fois quand M arrivera en H'. Cela montre comment CZ doit être placée par rapport à la trajectoire du point T, qui est, on le sait, une courbe à longue inflexion; l'arc décrit par T dans son mouvement ascendant passe à droite de la tangente d'inflexion CD, pour venir la traverser au point D, après avoir subi une seconde inflexion; il faut donc que CZ soit dirigé un peu à droite de CD, de manière à couper l'arc aux trois points C, T_1, T_2, qui seront les positions du point T quand M sera en P, H et H'. La figure montre clairement que, pour restreindre autant que possible la distance de T

à la droite CZ, celle-ci doit être dirigée de manière que le maximum d'écart pendant le parcours de l'arc CT ait la même valeur absolue, δ_1, que lorsque T va de T_1 en T_2. Quand T atteint cette dernière position, on peut supposer que la demi-oscillation du balancier soit ter-

Fig. 2.



minée, la déviation étant rigoureusement nulle ; mais il est plus rationnel de prolonger un peu l'excursion du balancier de manière que T vienne en T_3 (*fig.* 2), à la distance δ_1 de CZ; M sera alors en Q à gauche de H'.

Faisons $POI = \varphi$, $QOI = \psi$.

Les équations (2) sont encore vraies ; mais, p étant la projection de P sur CH, on peut prendre sans erreur appréciable $CP = Cp$, et l'on a

$$CI = CP - Ip = 2a - R\sin\varphi.$$

En substituant cette valeur dans les équations (2), comme nous avons fait dans le premier cas, on trouvera pour la déviation

$$\delta = \frac{R(\cos x - \cos\alpha)\sqrt{R(\sin\varphi - \sin x)[4a - R(\sin\varphi - \sin x)]}}{2a - R(\sin\varphi - \sin x)}.$$

Nous considérerons encore la valeur approchée

$$\delta = (\cos x - \cos \alpha)\sqrt{\sin \varphi - \sin x}\sqrt{\frac{R^3}{a}};$$

je remplace les sinus et cosinus par les premiers termes de leurs développements en série, et je considère le carré du résultat de cette substitution,

$$(5) \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{4}(\alpha^2 - x^2)^2(\varphi - x);$$

cette quantité, qui augmente et diminue en même temps que δ, est maximum quand x satisfait à l'équation

$$5x^2 - 4\varphi x - \alpha^2 = 0.$$

Si l'on élimine x entre cette équation et la précédente, l'équation résultante a pour racines les maxima de ε :

$$(6) \qquad \begin{cases} (140\alpha^4\varphi + 4\alpha^2\varphi^3 - 625\varepsilon)^2 \\ \qquad = 16(25\alpha^4 + 15\alpha^2\varphi^2 - 4\varphi^4)(5\alpha^6 + 31\alpha^4\varphi^2 - 125\varphi\varepsilon). \end{cases}$$

Nous avons vu que les deux valeurs maxima de δ doivent être égales; pour exprimer que les racines de l'équation précédente sont aussi égales, j'écris qu'elle a une racine commune avec son équation dérivée; l'élimination de ε donne lieu à un calcul plus court que si l'on applique la condition d'égalité des racines de l'équation du second degré, et le résultant peut se mettre sous la forme très simple

$$(5\alpha^2 - \varphi^2)^2(5\alpha^2 + 4\varphi^2)^3 = 0.$$

Il faut donc prendre $\varphi^2 = 5\alpha^2$, $\varphi = \alpha\sqrt{5}$, pour que les valeurs maxima de ε, et par suite celles de δ, soient égales; l'équation (6) admet alors pour racine double

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{2\varphi}{5}\right)^5 = \frac{32\alpha^5}{25\sqrt{5}},$$

la déviation correspondante est

$$(7)\qquad \delta_1 = \left(\frac{2\varphi}{5}\right)^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{R^3}{a}}.$$

Reste à chercher la position du point Q, ce qui revient à calculer la valeur de x immédiatement inférieure à $-\alpha$ pour laquelle $\varepsilon = \varepsilon_1$; on aura, en remplaçant dans l'équation (5) φ par $\alpha\sqrt{5}$, et ε par ε_1,

$$\frac{32\alpha^5}{25\sqrt{5}} = \frac{1}{4}(x^2 - \alpha^2)^2(\alpha\sqrt{5} - x);$$

on trouve, par approximations successives, $x = -1,341 \cdot \alpha = -0,600\varphi$; ψ est très sensiblement les $\frac{3}{5}$ de φ. Si donc q est la projection de Q sur CH, les segments Ip, Iq sont dans le rapport de 5 à 3; or les déplacements horizontaux des points A et M sont presque égaux, et, quand M est sur la verticale OI, A est très près de CZ; cette droite divise donc la flèche A'F dans le rapport de 5 à 3, le plus grand segment se terminant en A' : c'est le résultat indiqué par M. Tchébicheff.

Pour exprimer δ_1 en fonction des données de la question, écrivons que AF $= pq$, ou sensiblement $R(\varphi + \psi)$:

$$R(\varphi + \psi) = \tfrac{8}{5}R\varphi = 4a\sin^2\tfrac{1}{2}\theta;$$

substituant la valeur de φ dans (7), on trouve pour la déviation maximum

$$\delta_1 = \frac{a^2}{R}\sin^5\frac{1}{2}\theta;$$

en comparant avec la formule (4), on voit qu'avec la modification que nous avons justifiée la déviation est à peu près diminuée des deux tiers de sa première valeur.

La construction du parallélogramme articulé ne sera guère compliquée par les règles précédentes; on tracera la corde et la flèche de l'arc que l'on veut faire décrire à l'extrémité du balancier; la droite que doit suivre la tige du piston sera menée parallèlement à la corde à une distance égale aux $\frac{3}{8}$ de la flèche; enfin, pour placer le point d'at-

tache C du contrebalancier, on décrira du point A′ comme centre, avec AT pour rayon, un arc de cercle qui coupera CZ en un point C′; C sera au-dessous de C′ à une distance égale à Pp, qu'on pourrait négliger, mais dont la grandeur est sensiblement

$$R(\cos\alpha - \cos\varphi) = \frac{2}{5}R\varphi^2 = \frac{5a^2}{2R}\sin^4\frac{1}{2}\theta = \frac{5}{32}\frac{\overline{A'F}^2}{R};$$

avec les données numériques que nous avons considérées, cette longueur serait de $0^m,0025$, et on peut toujours la construire graphiquement.

Intégration, sous forme finie, de trois espèces d'équations différentielles linéaires, à coefficients variables;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

La seule méthode vraiment pratique que l'on possède actuellement pour l'intégration, sous forme finie, des équations différentielles ordinaires, est celle qu'on emploie pour intégrer les équations différentielles linéaires *à coefficients constants*. L'objet de ce Mémoire est d'en présenter une autre, aussi pratique pour le moins que la précédente, mais infiniment plus générale, puisqu'elle permet d'intégrer, sous forme finie, trois espèces d'équations différentielles linéaires à *coefficients variables*, et que c'est précisément dans l'une de ces trois espèces que rentrent, pour y constituer une simple variété, toutes les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Les équations différentielles de la première de ces trois espèces s'intègrent, comme on le verra, sous forme finie, à l'aide des seules fonctions algébriques rationnelles; celles de la deuxième, par des fonctions algébriques rationnelles et des exponentielles de la forme a^x; celles de la troisième, par des fonctions algébriques rationnelles et des logarithmes de la forme $L(1 - ax)$.

Pour chacune de ces trois espèces, nous donnons l'expression générale de l'intégrale, de façon que celle-ci peut s'écrire sans ombre de tâtonnement. Dans la seconde et la troisième espèce, à la vérité, cette expression suppose la résolution préalable d'une certaine équation algébrique, que nous appelons l'*équation caractéristique* de l'équa-

tion différentielle à intégrer : la nécessité d'un pareil calcul se présente déjà dans le cas des équations différentielles linéaires à coefficients constants, lesquelles rentrent d'ailleurs dans la seconde de nos trois espèces. Mais, et c'est là, ce nous semble, un fait très remarquable, la formule que nous donnons pour intégrer les équations différentielles de notre première espèce n'exige nullement la résolution ni de cette équation caractéristique, ni d'aucune équation algébrique d'un degré supérieur au premier.

C'est en étudiant la sommation des séries entières que nous sommes parvenu à cette méthode d'intégration pour ces trois espèces d'équations différentielles. Cette méthode nous paraît nouvelle; elle donne l'intégrale sous forme finie; elle s'applique à un très grand nombre d'équations différentielles; elle offre surtout cet avantage d'être tout à fait pratique : nous l'avons résumée antérieurement dans une courte Note que notre illustre maître, M. Hermite, a bien voulu présenter [1] à l'Académie des Sciences.

I. — *Préliminaires.*

1. Soit une équation différentielle linéaire, d'ordre quelconque ω, sans second membre, à coefficients constants ou variables, et relative à une fonction Y de la seule variable indépendante x. Si nous désignons par Y_0, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, ... les valeurs pour $x = 0$ de la fonction Y et de ses dérivées successives, puis que nous prenions par rapport à x les dérivées d'un ordre quelconque, mais suffisamment élevé, des deux membres de cette équation différentielle, en remplaçant x par zéro dans le résultat du calcul, forcément nous arriverons à une équation ne contenant plus Y ni x, dont le second membre sera nul et dont le premier sera la somme des quantités $Y_0^{(n)}$, $Y_0^{(n-1)}$, $Y_0^{(n-2)}$, ..., respectivement multipliées par des fonctions de n. Cette dernière équation subsistera pour toutes les valeurs de n supérieures à un entier déterminé ν, et nous la nommerons l'*équation dérivée* de l'équation différentielle considérée.

---

(1) Dans la séance du 3 février 1879.

A toute équation différentielle linéaire correspond une pareille équation dérivée. Celle-ci peut affecter évidemment une multitude de formes diverses. Nous disons qu'elle est *régulière* lorsqu'elle peut se mettre sous la forme

$$K_0 F(n) Y_0^{(n)} + K_1 F(n-1) Y_0^{(n-1)} + \ldots + K_k F(n-k) Y_0^{(n-k)} = 0,$$

dans laquelle $F(n)$ représente une fonction quelconque de n et où les coefficients K ainsi que l'entier k sont indépendants de n, c'est-à-dire constants.

Dans le présent Mémoire, nous n'étudions, pour les intégrer, que les seules équations différentielles linéaires dont les équations dérivées sont des équations dérivées *régulières*.

2. Évidemment ces équations différentielles linéaires, assujetties à avoir des équations dérivées régulières, ne sont point des équations quelconques ; mais elles constituent, dans la grande classe des équations différentielles linéaires sans second membre et à coefficients constants ou variables, un genre fort intéressant et d'une très vaste étendue.

Ce genre contient vraisemblablement une infinité d'espèces, caractérisées chacune par une forme particulière de la fonction $F(n)$. Nous n'essayerons point de les classer : une telle opération est peut-être impossible. Nous montrerons seulement comment on est amené naturellement à les distinguer.

Jusqu'ici nous en avons distingué trois, renfermant chacune une infinité d'équations différentielles linéaires que nous sommes parvenu à intégrer toutes. Ces trois espèces d'équations différentielles seseront pour nous, par une raison purement chronologique, les trois premières espèces du genre. Elles sont respectivement caractérisées par les trois égalités

$$F(n) = \frac{1}{n! f(n)},$$

$$F(n) = \frac{(n+s)!}{n! f(n)},$$

$$F(n) = \frac{(n+s)(n+s+1)\ldots(n+s+t-1)}{n! f(n)},$$

dans lesquelles nous désignons par t un entier supérieur à zéro, par s un entier positif, nul ou négatif, et par $f(n)$ un polynôme quelconque, entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Si, dans la seconde de ces trois égalités, nous supposons s égal à zéro et $f(n)$ égal à l'unité, nous trouvons que $F(n)$ est aussi égal à l'unité. Cette valeur de la fonction $F(n)$ correspond aux équations différentielles linéaires à coefficients constants, et l'on voit par là que ces dernières équations différentielles rentrent, comme variété particulière, dans la seconde de nos trois espèces.

5. Comme exemples d'équations différentielles linéaires numériques appartenant respectivement à ces trois espèces, nous citerons :

Dans la première espèce,

$$(x^4 + x^3 + x^2)\frac{d^2Y}{dx^2} + (4x^3 + x^2 - 2x)\frac{dY}{dx} + (2x^2 - x + 2)Y = 0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation régulière

$$\frac{1}{n!n}Y_0^{(n)} + \frac{1}{(n-1)!(n-1)}Y_0^{(n-1)} + \frac{1}{(n-2)!(n-2)}Y_0^{(n-2)} = 0,$$

laquelle nous donne

$$F(n) = \frac{1}{n!n}$$

et subsiste pour toutes les valeurs de n supérieures à 2;

Dans la deuxième espèce,

$$x^2\frac{d^2Y}{dx^2} - 2x(x+1)\frac{dY}{dx} + 2(x+1)Y = 0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation régulière

$$\frac{(n-1)!}{n!}Y_0^{(n)} - 2\frac{(n-2)!}{(n-1)!}Y_0^{(n-1)} = 0,$$

laquelle nous donne

$$F(n) = \frac{(n-1)!}{n!}$$

et subsiste pour toutes les valeurs de n supérieures à 2;

Enfin, dans la troisième espèce,

$$(x^3 - 7x^2 + 12x)\frac{d^3Y}{dx^3} + (5x^2 - 28x + 36)\frac{d^2Y}{dx^2} + (4x - 14)\frac{dY}{dx} = 0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation régulière

$$12\frac{n(n+1)}{n!}Y_0^{(n)} - 7\frac{(n-1)n}{(n-1)!}Y_0^{(n-1)} + \frac{(n-2)(n-1)}{(n-2)!}Y_0^{(n-2)} = 0,$$

laquelle nous donne

$$F(n) = \frac{n(n+1)}{n!}$$

et subsiste encore pour toutes les valeurs de n supérieures à 2.

C'est à ces trois équations différentielles que nous appliquerons la méthode d'intégration que nous allons exposer.

II. — *Intégration, par les séries, de toutes les équations différentielles du genre.*

4. En conservant les notations qui précèdent, nous avons, d'après la formule de Maclaurin,

$$Y = Y_0 + \frac{x}{1!}Y_0^{(1)} + \frac{x^2}{2!}Y_0^{(2)} + \frac{x^3}{3!}Y_0^{(3)} + \ldots,$$

et cette formule nous montre que, pour déterminer Y, il suffit de calculer les valeurs numériques des quantités Y_0, $Y_0^{(1)}$, $Y_0^{(2)}$, $Y_0^{(3)}$, ... Ce calcul est le fondement de la méthode générale que nous avons donnée naguère [1] pour intégrer, à l'aide des séries, et quels qu'en soient les coefficients et les seconds membres, toutes les équations différentielles linéaires. Nous ne faisons ici qu'appliquer cette méthode générale aux équations différentielles du genre que nous considérons, c'est-à-dire aux équations différentielles linéaires, sans second membre

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 7 mai 1877.

et à coefficients variables, dont l'équation dérivée (1) est une équation régulière.

5. L'équation différentielle que nous considérons étant supposée d'ordre ω, nous pouvons, sauf dans des cas tout à fait exceptionnels dont nous donnerons un exemple (19), nous pouvons, disons-nous, attribuer aux ω quantités $Y_0, Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}, \ldots, Y_0^{(\omega-1)}$ des valeurs arbitraires. Ces valeurs, que nous désignerons par $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\omega$, seront les constantes arbitraires de l'intégrale que nous calculons. Puisqu'elles sont distinctes et que leur nombre est ordinairement égal à l'ordre ω de l'équation différentielle, cette intégrale, ordinairement aussi, est l'intégrale générale de l'équation différentielle considérée.

Il est évident que cette équation différentielle nous permettra elle-même de calculer de proche en proche, en fonction des constantes arbitraires $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\omega$, les valeurs des quantités $Y_0^{(\omega)}, Y_0^{(\omega+1)}, Y_0^{(\omega+2)}, \ldots$. Nous calculerons ces diverses valeurs jusqu'à celle de $Y_0^{(\nu)}$ inclusivement, ν désignant (1) l'entier auquel l'ordre n de l'équation dérivée est constamment supérieur.

Ces calculs effectués, le polynôme

$$Y_0 + \frac{x}{1!} Y_0^{(1)} + \frac{x^2}{2!} Y_0^{(2)} + \frac{x^3}{3!} Y_0^{(3)} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!} Y_0^{(\nu)},$$

qui constitue le commencement du développement de Y et qui présente $\nu + 1$ termes, aura tous ses coefficients exprimés en fonction des constantes arbitraires $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\omega$.

6. Considérons maintenant l'équation dérivée (1)

$$K_0 F(n) Y_0^{(n)} + K_1 F(n-1) Y_0^{(n-1)} + \ldots + K_k F(n-k) Y_0^{(n-k)} = 0,$$

et posons

$$F(n) Y_0^{(n)} = v_n.$$

Nous trouvons cette nouvelle équation

$$K_0 v_n + K_1 v_{n-1} + K_2 v_{n-2} + \ldots + K_k v_{n-k} = 0,$$

qui, de même que l'équation dérivée d'où on la tire, subsiste pour toutes les valeurs de n supérieures à ν, et sur laquelle nous voyons que v_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est l'équation

$$K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + K_2 x^{k-2} + \ldots + K_k = 0,$$

qui est du degré k, et que, par une extension naturelle d'une expression usitée, nous nommerons l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle proposée.

En nous appuyant sur les travaux de Moivre [1], d'Euler [2] et de Lagrange [3], nous savons, à l'aide des racines de cette équation caractéristique, écrire v_n sous la forme d'un polynôme entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n, et présentant k coefficients indéterminés. Mais l'équation

$$F(n) Y_0^n = v_n,$$

que nous avons posée plus haut, nous donne

$$Y_0^{(n)} = \frac{v_n}{F(n)}.$$

Donc $Y_0^{(n)}$ s'exprime à l'aide d'une expression connue de n, qui contient k coefficients indéterminés.

Évidemment, k est au plus égal à la plus petite valeur possible de n, c'est-à-dire à $\nu + 1$. Donc nous pourrons toujours déterminer ces k coefficients en fonction des ω constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, ..., C_ω. Il nous suffira, pour cela, de résoudre par rapport à ces k coefficients les k équations du premier degré qu'on obtient en égalant les quantités

$$\frac{v_{\nu-k+1}}{F(\nu-k+1)}, \quad \frac{v_{\nu-k+2}}{F(\nu-k+2)}, \quad \ldots, \quad \frac{v_{\nu-1}}{F(\nu-1)}, \quad \frac{v_\nu}{F(\nu)},$$

---

(1) *Miscellanea analytica.*

(2) *Introductio in Analysin.*

(3) *Œuvres complètes,* 1re série.

qui sont exprimées au moyen de ces coefficients, aux quantités correspondantes

$$Y_0^{(\nu-k+1)},\quad Y_0^{(\nu-k+2)},\quad \ldots,\quad Y_0^{(\nu-1)},\quad Y_0^{(\nu)},$$

qui sont exprimées en fonction des constantes arbitraires.

Ces coefficients déterminés, et leurs expressions portées dans v_n, le quotient $\frac{v_n}{F(n)}$ se transforme en une fonction de n et de nos constantes arbitraires; la série dont il exprimait le terme général gagne les k termes $Y_0^{(\nu-k+1)}, Y_0^{(\nu-k+2)}, \ldots, Y_0^{(\nu-1)}, Y_0^{(\nu)}$, qui précèdent le terme $Y_0^{(\nu+1)}$ où elle commençait d'abord. Si nous désignons par X le polynôme

$$Y_0 + \frac{x}{1!}Y_0^{(1)} + \frac{x^2}{2!}Y_0^{(2)} + \ldots + \frac{x^{\nu-k}}{(\nu-k)!}Y_0^{(\nu-k)},$$

qui est entier en x et qui s'annule lorsque k est égal à $\nu+1$, l'intégrale dont nous nous occupons peut s'écrire

$$Y = X + \sum_{\nu-k+1}^{+\infty} \frac{v_n}{n!\,F(n)}\,x^n,$$

et cette formule nous donne, à l'aide des séries, une intégrale, qui est d'ordinaire l'intégrale générale, pour toutes les équations différentielles linéaires appartenant au genre que nous considérons.

7. Cette intégrale se compose, on le voit, d'un polynôme et d'une série. Dès qu'on saura sommer cette série, on saura écrire cette intégrale sous forme finie, en sorte que l'intégration sous forme finie des équations différentielles linéaires du genre considéré se ramène à la sommation des séries entières dont le terme général V_n est défini par l'égalité

$$V_n = \frac{v_n}{n!\,F(n)}\,x^n,$$

dans laquelle $F(n)$ désigne une fonction quelconque de n et où v_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Il y a corrélation complète entre cette intégration et cette sommation, et par suite entre les équations différentielles linéaires, sans

second membre et à coefficients variables, dont l'équation dérivée est régulière, et les séries entières dont le terme général affecte la forme qu'on vient d'écrire. Dans ce genre d'équations différentielles et ce genre de séries, où les espèces nous paraissent être en nombre infini, à chaque espèce de séries, caractérisée par une forme particulière de la fonction $F(n)$, correspond une espèce d'équations différentielles, caractérisée par la même forme de la même fonction. Dès qu'on saura sommer les séries d'une certaine espèce, on saura intégrer les équations différentielles de l'espèce correspondante.

Dans l'état actuel de la Science, il nous semble que, parmi les séries du genre considéré, on n'en sait sommer que trois espèces, à savoir les séries récurrentes sommées [1] par Moivre à l'aide des fractions rationnelles, les séries que nous avons sommées [2] nous-même à l'aide des exponentielles, et celles que nous avons sommées [3] à l'aide des logarithmes. Ces trois espèces répondent aux trois formes du terme général U_n données par ces trois égalités

$$U_n = u_n x^n,$$

$$U_n = \frac{u_n}{n!} x^n,$$

$$U_n = \frac{u_n}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+t-1)} x^n,$$

dans lesquelles nous désignons par t un entier supérieur à zéro et par u_n le terme général d'une série récurrente proprement dite quelconque.

Ces trois formes du terme général U_n, avec toutes celles qui peuvent s'y ramener, correspondent évidemment aux trois formes de la fonction $F(n)$ que nous avons données précédemment (2), et les trois espèces de séries que nous considérons correspondent aux trois espèces d'équations différentielles que nous nous proposons d'intégrer.

C'est parce que nous savons sommer toutes ces séries que nous savons intégrer sous forme finie toutes ces équations différentielles. Si

---

(1) *Miscellanea analytica.*

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 15 avril 1878.

(3) *Ibid.*, séance du 16 décembre 1878.

l'on découvrait la manière de sommer une quatrième, une cinquième, etc., espèce de séries du genre que nous étudions, on saurait immédiatement, d'après ce qui précède, intégrer sous forme finie une quatrième, une cinquième, etc., espèce d'équations différentielles. Il y a là tout un nouveau champ de recherches, pour ainsi dire inexploré.

III. — *Intégration, sous forme finie, des équations différentielles de la première espèce.*

8. La première espèce de nos équations différentielles est caractérisée (**2**) par l'égalité

$$F(n) = \frac{1}{n!\,f(n)},$$

dans laquelle $f(n)$ est un polynôme quelconque, entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Pour toute équation différentielle de cette espèce, la formule (**6**) d'intégration prend la forme

$$Y = X + \sum_{\nu-k+1}^{+\infty} {}_n f(n) v_n x^n.$$

Or $f(n)$ et v_n sont deux polynômes connus, entiers par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n, dont les coefficients sont, dans le premier, numériques, et, dans le second, fonctions des constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_\omega$. Leur produit $f(n)v_n$ sera tout à fait analogue à chacun d'eux ; en d'autres termes, il ne sera autre chose que le terme général u_n d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice se déduirait immédiatement de la forme même du produit $f(n)v_n$. Donc l'intégrale précédente peut s'écrire

$$Y = X + \sum_{\nu-k+1}^{+\infty} {}_n u_n x^n,$$

et, sous cette dernière forme, nous voyons que, pour exprimer Y sans

série infinie, nous n'avons qu'à sommer une série appartenant justement à la première des trois espèces (7), que nous savons sommer.

9. Les séries de cette première espèce ne sont évidemment autre chose que les séries récurrentes proprement dites. Depuis les beaux travaux de Moivre, d'Euler et de Lagrange, leur somme est bien connue : c'est une fraction rationnelle, dont le dénominateur est le polynôme entier en x qu'on obtient en remplaçant x par $\frac{1}{x}$ dans le premier membre de l'équation génératrice et en multipliant ensuite par la plus haute puissance de x qui figure dans ce premier membre, et dont le numérateur est un polynôme entier en x, d'un degré inférieur d'une unité à celui du dénominateur, dont les coefficients se déterminent à l'aide des coefficients des premiers termes de la série et qu'il faut multiplier par la puissance de x qui figure dans le premier terme de cette série.

La connaissance de u_n nous conduit directement à celle du dénominateur $\Phi(x)$ de cette fraction rationnelle. Si nous en désignons le numérateur, dont les coefficients sont calculés comme nous venons de le dire, par l'expression $\varphi(x)$, puis que nous multipliions cette expression par $x^{\nu-k+1}$, nous avons

$$Y = X + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)} x^{\nu-k-1},$$

et il suit de ce qui précède qu'au second membre de cette formule les coefficients sont ou numériques, ou exprimés à l'aide des constantes arbitraires $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_\omega$.

Telle est la formule générale d'intégration, sous forme finie, de toutes les équations différentielles de notre première espèce. Elle ne contient, on le voit, que des fonctions algébriques rationnelles.

10. Dans les raisonnements qui précèdent, nous nous sommes appuyé sur les racines, supposées connues, de l'équation caractéristique

$$K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + K_2 x^{k-2} + \ldots + K_k = 0.$$

Mais, chose, selon nous, très remarquable, pour intégrer il est inutile de résoudre cette équation. En effet, connaissant d'une part

l'équation génératrice de v_n, de l'autre celle du polynôme $f(n)$, qui n'est, lui aussi, que le terme général d'une série récurrente, on obtient immédiatement celle du produit $f(n)v_n$, c'est-à-dire celle de u_n. Les racines de cette dernière équation génératrice sont les produits qu'on obtient en multipliant chaque racine de la première équation génératrice par chaque racine de la seconde, et le degré de multiplicité de chaque racine ainsi constituée est la somme, diminuée d'une unité, des degrés de multiplicité des deux racines constituantes.

On écrira donc, sans résoudre l'équation caractéristique, le dénominateur $\Phi(x)$. Quant au numérateur $\varphi(x)$, on en déduira les coefficients de la considération des valeurs des premiers termes de la série que l'on somme, valeurs calculées en fonction des constantes arbitraires C_1, C_2, C_3, ..., C_ω, soit à l'aide de l'équation différentielle elle-même, soit, pour les termes éloignés, à l'aide de l'équation dérivée.

11. Pour donner un exemple, considérons l'équation différentielle déjà citée (**5**)

$$(x^4+x^3+x^2)\frac{d^2Y}{dx^2}+(4x^3+x^2-2x)\frac{dY}{dx}+(2x^2-x+2)Y=0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation

$$\frac{1}{n!\,n}Y_0^{(n)}+\frac{1}{(n-1)!(n-1)}Y_0^{(n-1)}+\frac{1}{(n-2)!(n-2)}Y_0^{(n-2)}=0,$$

où nous avons à la fois

$$F(n)=\frac{1}{n!\,n},$$

$$\nu=2,\quad k=2.$$

L'équation différentielle considérée nous donne immédiatement

$$Y_0=0,\quad Y_0^{(1)}=C_1,\quad Y_0^{(2)}=C_2;$$

d'où nous déduisons

$$X=0.$$

L'équation génératrice de v_n est

$$x^2+x+1=0,$$

et, comme ici $f(n)$ est simplement égal à n, celle de u_n est

$$(x^2 + x + 1)^2 = 0.$$

Donc nous avons

$$Y = \frac{\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3}{(1 + x + x^2)^2} x.$$

En calculant les coefficients du numérateur à l'aide des valeurs de $Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}, Y_0^{(3)}, Y_0^{(4)}$, données soit par l'équation différentielle elle-même, soit, pour les dernières, par l'équation dérivée qui précède, on trouve finalement

$$Y = \frac{C_1 + (\frac{1}{2}C_2 + 2C_1)x + \frac{1}{4}C_2 x^2}{(1 + x + x^2)^2} x,$$

ou bien, en remplaçant simplement $\frac{1}{4}C_2$ par C_2,

$$Y = \frac{C_1 x + 2(C_1 + C_2)x^2 + C_2 x^3}{(1 + x + x^2)^2}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation différentielle considérée. Nous l'avons obtenue, on le voit, sans avoir eu besoin de résoudre l'équation caractéristique.

IV. — *Intégration, sous forme finie, des équations différentielles de la deuxième espèce.*

12. Notre deuxième espèce d'équations différentielles est caractérisée (**2**) par l'égalité

$$F(n) = \frac{(n+s)!}{n!f(n)},$$

dans laquelle s désigne un nombre entier quelconque, positif, nul ou négatif, et $f(n)$ un polynôme quelconque, entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Pour toute équation de cette espèce, notre formule générale (**6**) nous donne l'égalité

$$Y = X + \sum_{-k+1}^{+\infty} n \frac{f(n) v_n}{(n+s)!} x^n;$$

laquelle, si l'on pose

$$(n)v_n = u_{n+s},$$

peut s'écrire

$$Y = X + x^{-s} \sum_{\nu-h+1}^{+\infty} \frac{u_{n+s}}{(n+s)!} x^{n+s},$$

ou bien encore, si l'on change la limite inférieure du Σ,

$$Y = X + x^{-s} \sum_{\nu-h+s+1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n.$$

Tout le calcul revient donc à sommer, sous forme finie, les séries dont le terme général U_n est donné par l'égalité

$$U_n = \frac{u_n}{n!} x^n,$$

dans laquelle u_n représente le terme général d'une série récurrente proprement dite quelconque.

15. Les séries dont le terme général peut se ramener à cette forme sont les séries de notre seconde espèce (**7**). Elles ont été sommées par nous dans un Mémoire inséré aux *Annales scientifiques de l'École Normale* (¹), et dont un résumé a été présenté à l'Académie des Sciences (²). Pour en faire connaître le résultat, nous rappellerons d'abord que, si l'on désigne par a l'une quelconque des racines de l'équation génératrice de u_n et par α son degré de multiplicité, on a

$$u_n = \Sigma \xi_a(n) a^n,$$

en étendant le Σ à toutes les racines de l'équation génératrice et désignant par $\xi_a(n)$ le polynôme

$$A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_{\alpha-1} n^{\alpha-1},$$

qui est entier en n et du degré $\alpha - 1$.

(¹) Année 1879.

(²) Dans la séance du 15 avril 1878.

Cela étant, nous avons prouvé dans ce Mémoire que, si l'on pose

$$h!\,Q_{a,h} = A_h \Delta^h \dot{O}^h + A_{h+1} \Delta^h O^{h+1} + A_{h+2} \Delta^h O^{h+2} + \ldots + A_{\alpha-1} \Delta^h O^{\alpha-1},$$

on a identiquement, en convenant d'étendre le premier Σ du second membre à toutes les racines de l'équation génératrice et en désignant par e la base des logarithmes népériens,

$$\sum_n^{\infty}{}_0 \frac{u_n}{n!} x^n = \sum \sum_h^{\alpha-1}{}_0 a^h x^h Q_{a,h} e^{ax}.$$

C'est là l'expression sous forme finie de la somme obtenue.

14. Comme nous avons, évidemment,

$$\sum_{n=\nu-k+s+1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{\nu-k+s} \frac{u_n}{n!} x^n,$$

nous pouvons écrire

$$Y = X - x^{-s} \sum_{n=0}^{\nu-k+s} \frac{u_n}{n!} x^n + x^{-s} \sum \sum_{h=0}^{\alpha-1} a^h x^h Q_{a,h} e^{ax}.$$

Telle est la formule générale d'intégration des équations différentielles de notre seconde espèce. On voit que l'intégrale qu'elle fournit ne contient, abstraction faite des fonctions algébriques rationnelles, que des exponentielles de la forme e^{ax}.

Les équations différentielles linéaires à coefficients constants avaient déjà des intégrales de cette forme. Il en devait être ainsi, puisque les équations différentielles linéaires à coefficients constants rentrent dans notre seconde espèce, dont elles constituent une simple variété.

On voit de plus que la formule que nous venons de donner nécessite, comme dans le cas des coefficients constants, la résolution de l'équation caractéristique

$$K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + K_2 x^{k-2} + \ldots + K_k = 0.$$

15. Appliquons les résultats précédents à l'intégration de l'équation différentielle numérique de deuxième espèce

$$x^2\frac{d^2Y}{dx^2}-2x(x+1)\frac{dY}{dx}+2(x+1)Y=0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation régulière

$$\frac{(n-1)!}{n!}Y_0^{(n)}-2\frac{(n-2)!}{(n-1)!}Y_0^{(n-1)}=0,$$

qui nous donne immédiatement

$$F(n)=\frac{(n-1)!}{n!},$$
$$\nu=2,\quad k=1,\quad s=-1,\quad f(n)=1$$

Nous avons ici, en nous reportant à la première forme de notre formule générale (**12**),

$$Y=X+\sum_{2}^{+\infty}{}_n\frac{v_n}{(n-1)!}x^n.$$

Nous tirons de l'équation différentielle elle-même

$$Y_0=0,\quad Y_0^{(1)}=C_1,\quad Y_0^{(2)}=C_2$$

et de l'équation dérivée

$$v_n=\lambda\,2^n.$$

Il en résulte

$$X=C_1x,$$
$$v_n=\tfrac{1}{8}C_2\,2^n=\tfrac{1}{4}C_2\,2^{n-1},$$
$$Y=C_1x+\frac{1}{4}C_2\sum_{2}^{\infty}{}_n\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}x^n,$$

et par conséquent

$$Y=C_1x+\frac{1}{4}C_2x\sum_{1}^{\infty}{}_n\frac{2^n}{n!}x^n.$$

La somme de cette dernière série se voit d'ailleurs immédiate-

ment; elle est égale à $e^{2x} - 1$. Donc nous avons finalement

$$Y = (C_1 - \tfrac{1}{4}C_2)x + \tfrac{1}{4}C_2 x e^{2x},$$

ou bien, en remplaçant $C_1 - \frac{1}{4}C_2$ par C_1 et $\frac{1}{4}C_2$ par C_2,

$$Y = C_1 x + C_2 x e^{2x}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation différentielle considérée.

V. — *Intégration, sous forme finie, des équations différentielles de la troisième espèce.*

16. Les équations différentielles de cette troisième espèce sont caractérisées (**2**) par l'égalité

$$F(n) = \frac{(n+s)(n+s+1)\dots(n+s+t-1)}{n!f(n)},$$

dans laquelle s désigne un entier quelconque, positif, nul ou négatif, t un entier quelconque, mais supérieur à zéro, $f(n)$ un polynôme entier par rapport à n et à des exponentielles de la forme a^n.

Pour toutes les équations différentielles de cette espèce, notre formule générale d'intégration (**6**) devient

$$Y = X + \sum_{\nu-k+1}^{+\infty} {}_n \frac{f(n)v_n}{(n+s)(n+s+1)\dots(n+s+t-1)} x^n.$$

Si nous posons

$$f(n)v_n = u_{n+s},$$

cette formule peut s'écrire

$$Y = X + x^{-s} \sum_{\nu-k+1}^{+\infty} {}_n \frac{u_{n+s}}{(n+s)(n+s+1)\dots(n+s+t-1)} x^{n+s}$$

ou bien

$$Y = X + x^{-s} \sum_{\nu-k+s+1}^{+\infty} {}_n \frac{u_n}{n(n+1)\dots(n+t-1)} x^n.$$

17. Sous cette dernière forme, on voit immédiatement que la série qui figure dans l'expression générale de Y appartient à la troisième espèce de nos séries. Or nous avons sommé toutes les séries de cette troisième espèce dans un Mémoire récent, inséré aux *Annales scientifiques de l'École Normale* [1], dont un résumé a paru dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* [2], et qui repose sur cette égalité déjà rappelée (**15**) :

$$u_n = \Sigma \xi_a(n) a^n.$$

Ce point de départ indiqué, nous avons trouvé que l'on a

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+t-1)} x^n = \psi(x) + S_1 + S_2,$$

à la condition : 1° de représenter par $\psi(x)$ une fraction rationnelle que notre Mémoire donne le moyen de former et qui n'existe que dans le seul cas où l'équation génératrice de u_n a des racines dont le degré de multiplicité est supérieur à t; 2° de poser à la fois

$$S_1 = \sum\sum_{1}^{t-1}{}_h \frac{(-1)^{h+1}}{(t-1-h)!\,h!} \frac{\xi_a(-h)}{a^h x^h}\left(\frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{2} + \ldots + \frac{a^h x^h}{h}\right),$$

$$S_2 = \sum\sum_{0}^{t-1}{}_h \frac{(-1)^{h+1}}{(t-1-h)!\,h!} \frac{\xi_a(-h)}{a^h x^h} \,\mathrm{L}(1-ax),$$

en désignant par L un logarithme népérien et convenant d'étendre, dans chacune de ces deux égalités, le premier Σ à toutes les racines de l'équation génératrice de u_n.

18. On a évidemment

$$\sum_{\nu-k+s+1}^{+\infty}{}_n \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+t-1)}$$
$$= \psi(x) + S_1 + S_2 - \sum^{\nu-k+s}{}_n \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+t-1)} x^n.$$

---

[1] Année 1880.

[2] Séance du 16 décembre 1878.

Donc, pour cette troisième espèce d'équations différentielles, l'intégrale est donnée, sous forme finie, par la formule

$$Y = X + x^{-s}\psi(x) + x^{-s}S_1 + x^{-s}S_2 + x^{-s}\sum_{1}^{\nu-k+s} \frac{u_n}{n(n+1)\ldots(n+t-1)}x^n,$$

qui nous montre que Y se compose uniquement de fonctions algébriques rationnelles et de logarithmes de la forme $L(1-ax)$.

Nous voyons en même temps que, dans cette troisième espèce, notre mode d'intégration suppose la résolution préalable de l'équation caractéristique

$$K_0 x^k + K_1 x^{k-1} + K_2 x^{k-2} + \ldots + K_k = 0.$$

19. Appliquons cette formule à l'intégration de l'équation différentielle numérique du troisième ordre

$$(x^3 - 7x^2 + 12x)\frac{d^3Y}{dx^3} + (5x^2 - 28x + 36)\frac{d^2Y}{dx^2} + (4x - 14)\frac{dY}{dx} = 0,$$

dont l'équation dérivée est l'équation régulière

$$12\frac{n(n+1)}{n!}Y_0^{(n)} - 7\frac{(n-1)n}{(n-1)!}Y_0^{(n-1)} + \frac{(n-2)(n-1)}{(n-2)!}Y_0^{(n-2)} = 0,$$

qui nous donne à la fois

$$F(n) = \frac{n(n+1)}{n!}, \quad f(n) = 1,$$
$$\nu = 2, \quad k = 2, \quad s = 0, \quad t = 2.$$

L'équation différentielle que nous considérons nous permet de poser

$$Y_0 = C_1, \quad Y_0^{(1)} = C_2,$$

mais nous montre que les quantités suivantes $Y_0^{(2)}, Y_0^{(3)}, \ldots$ sont déterminées en fonction des deux premières. Donc l'exemple qui nous occupe tombe dans l'un de ces cas exceptionnels (5) où l'intégrale

fournie par notre méthode n'est pas tout à fait l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

Quoi qu'il en soit, dans notre exemple, s étant nul, $f(n)$ égal à l'unité, et les racines de l'équation caractéristique égales respectivement à $\frac{1}{3}$ et à $\frac{1}{4}$, la fraction $\psi(x)$ n'existe pas, et nous avons évidemment

$$v_n = u_n = \lambda_1 \left(\tfrac{1}{3}\right)^n + \lambda_2 \left(\tfrac{1}{4}\right)^n.$$

On obtient facilement d'ailleurs

$$X = C_1, \quad \lambda_1 = 24 C_2, \quad \lambda_2 = -24 C_2.$$

Donc nous trouvons

$$Y = C_1 + 24 C_2 \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{n(n+1)} x^n,$$

et, en appliquant à la série qui figure dans cette expression notre formule de sommation, puis remplaçant $24\,C_2$ simplement par C_2,

$$Y = C_1 + C_2 \left[\left(\frac{3}{x} - 1\right) L\left(1 - \frac{x}{3}\right) - \left(\frac{4}{x} - 1\right) L\left(1 - \frac{x}{4}\right) \right].$$

Telle est l'intégrale que fournit notre méthode. Elle ne contient que deux constantes et, par conséquent, n'est pas l'intégrale générale; mais elle permet d'obtenir celle-ci.

En effet, d'après un théorème qui nous paraît dû à Lagrange, on peut diminuer l'ordre d'une équation différentielle linéaire d'un nombre d'unités égal à celui des intégrales particulières qu'on en possède. En appliquant ce théorème à l'équation proposée, on parvient à une équation différentielle du premier ordre, qui admet l'intégrale $\frac{C}{x}$. Il suffirait d'ajouter ce terme à l'intégrale trouvée déjà pour obtenir l'intégrale générale cherchée

VI. — *Résumé.*

20. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé nos équations différentielles linéaires dénuées de second membre. Comme on possède plusieurs moyens de ramener aux équations dénuées de second membre les équations qui en sont pourvues, il était assez naturel de ne considérer que les premières. Toutefois, nous pouvons faire remarquer que, dans le cas où le second membre est un polynôme entier en x, il est inutile de recourir aux moyens que nous venons de rappeler : nos procédés, tels que nous les avons exposés, suffisent alors à l'intégration.

21. Quoi qu'il en soit, les résultats du présent travail peuvent se résumer ainsi :

Les équations différentielles de notre première espèce admettent une intégrale composée uniquement de fonctions algébriques rationnelles ;

Celles de la seconde espèce, une intégrale composée de fonctions algébriques rationnelles et d'exponentielles de la forme a^x;

Celles enfin de la troisième, une intégrale composée de fonctions algébriques rationnelles et de logarithmes de la forme $L(1 - ax)$.

22. Cette intégrale est le plus souvent l'intégrale générale de l'équation différentielle considérée. Elle peut s'écrire sous forme finie, pour les équations de la deuxième et de la troisième espèce, dès que l'on sait résoudre l'équation caractéristique correspondante et quels que soient d'ailleurs dans celle-ci les degrés de multiplicité des racines. Pour les équations différentielles de la première espèce, l'intégrale peut s'écrire sous forme finie, d'une façon tout à fait immédiate, sans qu'on ait préalablement besoin de résoudre ni l'équation caractéristique ni aucune équation d'un degré supérieur au premier.

23. La méthode d'intégration que nous avons exposée est une conséquence toute naturelle de nos précédents travaux sur l'intégration

des équations différentielles linéaires [1] et sur la sommation des séries [2]. Au fond, elle consiste à développer l'intégrale cherchée en série et à sommer la série obtenue. Les formules générales d'intégration que nous avons données pour nos trois espèces d'équations différentielles font connaître le résultat de cette double opération. Dans la pratique, et grâce à ces formules, notre méthode ne conduit qu'à des calculs simples, réguliers, exempts de tâtonnements. Elle s'applique déjà aux trois espèces très vastes que nous avons distinguées et étudiées. Nous avons vu qu'il suffirait, pour l'étendre à de nouvelles espèces d'équations différentielles, d'arriver à sommer de nouvelles espèces de séries. Aussi cette méthode d'intégration nous semble-t-elle intéressante, tant à cause de sa régularité, de sa simplicité, de son caractère éminemment pratique, qu'en raison du grand nombre des équations différentielles auxquelles elle s'étend déjà et du nombre plus grand encore de celles auxquelles on ne manquera pas de l'étendre.

---

(1) *Comptes rendus*, séance du 7 mai 1877.
(2) *Ibid.*, séances du 22 avril et du 16 décembre 1878.

Note sur les différentes branches de la Cinématique;

PAR M. H. RESAL [1].

J'ai remarqué, dans le Bulletin bibliographique du dernier numéro des *Comptes rendus*, que, dans la séance du 15 décembre dernier, l'Académie a reçu l'Ouvrage de M. Mannheim, ayant pour titre : *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique, comprenant les éléments de Géométrie cinématique.*

Qu'il me soit permis, à cette occasion, de bien déterminer le sens que l'on doit attribuer actuellement à la dénomination de *Cinématique*.

Dans une conversation particulière, l'illustre Poncelet m'a fait à peu près la déclaration suivante :

« M. Ampère nous a fait l'honneur, à M. É. de Beaumont et à moi, de nous convoquer chez lui en vue de donner nos appréciations sur certaines dénominations nouvelles qu'il proposait d'introduire dans la classification des Sciences. Nous sommes tous trois tombés d'accord sur la définition de la *Kinématique* (κίνημα), dont l'expression a été transformée plus tard en celle de *Cinématique*. »

Laissons maintenant parler Ampère [2] :

« Cette Science (la Cinématique) doit renfermer tout ce qu'il y a à dire des différentes sortes de mouvements, indépendamment des forces qui peuvent les produire. Elle doit d'abord s'occuper de toutes les considérations relatives aux espaces parcourus dans les différents mouvements, aux temps employés à les parcourir, à la détermination des vitesses d'après les diverses relations qui peuvent exister entre ces espaces et ces temps.

---

[1] Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 29 décembre 1879.

[2] *Essai sur la philosophie des Sciences*, p. 51.

» Elle doit ensuite étudier les différents instruments à l'aide desquels on peut changer un mouvement en un autre; en sorte qu'en comprenant, comme c'est l'usage, ces instruments sous le nom de *machines*, il faudra définir une machine, non pas, comme on le fait ordinairement, *un instrument à l'aide duquel on peut changer la direction et l'intensité d'une force donnée, mais bien un instrument à l'aide duquel on peut changer la direction et la vitesse d'un mouvement donné.* »

A tort ou à raison, j'ai cru devoir faire une réserve relativement à la dénomination générale de *Cinématique*, et, en 1862, j'ai publié un *Traité de Cinématique pure,* Ouvrage dont le titre a, du reste, été approuvé par Poncelet et dans lequel j'ai étudié les propriétés du mouvement considéré indépendamment de ses causes, sans m'occuper des machines.

Bour a alors appelé *Cinématique appliquée* la partie qui traite spécialement des machines.

Les dénominations de *Cinématique pure* et *Cinématique appliquée* ont été adoptées et sont maintenant d'un usage général.

Enfin M. Mannheim vient d'introduire dans son remarquable Ouvrage l'expression de *Géométrie cinématique.*

Cette nouvelle branche de la Science, qui a son point de départ dans les travaux de Descartes, de Pascal, d'Euler et surtout dans ceux de notre illustre confrère M. Chasles, a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces et du temps. M. Mannheim, par de nombreuses et intéressantes applications, a montré que l'emploi des propositions élémentaires de la Géométrie cinématique constitue une méthode d'une véritable originalité.

La *Géométrie cinématique* de M. Mannheim n'est pas simplement la partie géométrique de la Cinématique telle qu'on l'étudiait jusqu'ici : elle considère, en outre, les figures mobiles de forme variable, comprend aussi la recherche des propriétés relatives aux figures de forme invariable pour lesquelles le déplacement n'est pas absolument défini et dont, avant M. Mannheim, on ne s'était jamais occupé.

Comme, dans cette courte Note, je n'ai eu pour objet que de fixer quelques définitions, je n'insiste pas sur la valeur du Livre de M. Mannheim. Qu'il me soit pourtant permis de dire que, à mon point de vue, ce beau travail établit un point de repère important dans l'histoire de la Science.

Sur la théorie des nombres complexes;

PAR M. G. ZOLOTAREFF.

Dans le Mémoire *Sur la méthode d'intégration de M. Tchebychef* (¹), j'ai donné la démonstration des théorèmes énoncés par ce géomètre pour l'intégration de la différentielle

$$\frac{(x+\mathrm{A})\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}},$$

α, β, γ, δ étant des nombres rationnels. Depuis, en me fondant sur la théorie des nombres complexes, je suis parvenu à résoudre la même question dans le cas où α, β, γ, δ ont des valeurs réelles quelconques. Dans le Mémoire qu'on va lire, j'expose cette théorie des nombres complexes qui dépendent des racines de l'équation quelconque irréductible à coefficients entiers. Avant d'aborder cette théorie, je crois devoir signaler ici deux Mémoires qui ont pour sujet la généralisation de la théorie connue de M. Kummer. L'un d'eux appartient à M. Selling (²) et l'autre à M. Dedekind (³).

(¹) *Mathematische Annalen*, Band V, série 560; *Journal de Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XIX; 1874.

(²) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1865.

(³) LEJEUNE-DIRICHLET, *Zahlen Theorie*, zweite Auflage, 1871.

Mais, si je ne me trompe, jusqu'ici il n'y a pas de théorie des nombres complexes pour le cas des équations quelconques aussi satisfaisante que la théorie de M. Kummer pour le cas des équations binômes.

1. Soient

$$(1) \qquad F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

une équation irréductible de degré quelconque n à coefficients entiers, et $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ ses n racines.

Nous nommerons nombre complexe entier par rapport à l'équation (1) toute fonction entière à coefficients entiers d'une racine de cette équation. Il est clair que tous ces nombres peuvent être présentés sous la forme

$$\varphi(x_0) = b_0 + b_1 x_0 + \ldots + b_{n-1} x_0^{n-1},$$

$b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ étant des nombres entiers ordinaires.

Dans la suite, nous donnerons une définition des nombres complexes plus générale, mais à présent nous nous bornons à la définition donnée ci-dessus.

Soient

$$\varphi(x_0), \ \psi(x_0), \ \chi(x_0), \ \ldots$$

des nombres complexes donnés. D'abord je vais faire voir comment on peut reconnaître, sans effectuer les multiplications, si le produit

$$\varphi(x_0)\psi(x_0)\chi(x_0)\ldots$$

est divisible par un nombre premier p non complexe. Dans ce but, je décompose la fonction $F(x)$ en facteurs irréductibles [1] suivant le module p. Soit

$$(2) \qquad F(x) \equiv V^m V_1^{m_1} \ldots V_h^{m_h} \pmod{p},$$

[1] *Gauss Werke*, II Band, série 212. — Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, chap. III.

$V, V_1, \ldots, V_h$ étant des fonctions irréductibles suivant le module p. Maintenant, si le nombre $\varphi(x_0)\psi(x_0)\chi(x_0)\ldots$ est divisible par p, la fonction $\varphi(x)\psi(x)\chi(x)\ldots$, étant divisée par $F(x)$, donnera le reste du degré inférieur à n, dont tous les coefficients seront divisibles par p.

En désignant donc par $\varpi(x)$ le quotient de cette division, nous aurons

$$\varphi(x)\psi(x)\chi(x)\ldots - \varpi(x)F(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

La fonction $F(x)$ étant divisible suivant le module p par $V^m V_1^{m_1}\ldots V_h^{m_h}$, la congruence ci-dessus montre que le produit $\varphi(x)\psi(x)\chi(x)\ldots$ doit contenir comme facteur la fonction $V^m V_1^{m_1}\ldots V_s^{m_s}$ suivant le module p.

Réciproquement, lorsque le produit $\varphi(x)\psi(x)\chi(x)\ldots$ est divisible par $V^m V_1^{m_1}\ldots V_h^{m_h}$ suivant le module p, le nombre complexe

$$\varphi(x_0)\psi(x_0)\chi(x_0)\ldots$$

sera divisible par p. En effet, nous avons par hypothèse la congruence

$$\varphi(x)\psi(x)\chi(x)\ldots \equiv \lambda(x)V^m V_1^{m_1}\ldots V_h^{m_h} \pmod{p},$$

$\lambda(x)$ étant une fonction entière à coefficients entiers, ou, ce qui est le même, la congruence

$$\varphi(x)\psi(x)\chi(x)\ldots \equiv \lambda(x)F(x) \pmod{p},$$

d'où l'on voit que les coefficients de tous les termes de la différence

$$\varphi(x)\psi(x)\chi(x)\ldots - \lambda(x)F(x),$$

seront divisibles par p; par conséquent, le nombre complexe

$$\varphi(x_0)\psi(x_0)\chi(x_0)\ldots$$

est divisible par p.

D'après cela, pour reconnaître si le nombre complexe

$$\varphi(x_0)\psi(x_0)\chi(x_0)\ldots$$

est ou non divisible par p, il faut décomposer les fonctions

$$\varphi(x),\ \psi(x),\ \chi(x),\ \ldots$$

en facteurs irréductibles suivant le module p.

Cela fait, nous verrons tout de suite si la fonction $V^m V_1^{m_1} \ldots V_h^{m_h}$ entre comme facteur suivant le module p dans le produit $\varphi(x)\,\psi(x)\,\chi(x)\ldots$

2. Le produit

$$\varphi(x_0)\,\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_{n-1}) = \mathrm{N}\varphi(x_0),$$

$\varphi(x_0)$ étant un nombre complexe entier, sera dit la *norme du nombre complexe* $\varphi(x_0)$. Ce produit est évidemment un nombre entier ordinaire.

Faisons voir maintenant qu'au moyen de la décomposition d'une fonction entière quelconque $\varphi(x)$ à coefficients entiers en facteurs irréductibles suivant le module p, on reconnaîtra facilement si la norme $\mathrm{N}\,\varphi(x_0)$ du nombre $\varphi(x_0)$ est divisible par p. Supposons que les fonctions

$$V,\ V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_h$$

qui figurent dans la congruence (2) du n° 1 aient respectivement pour degrés les nombres $\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h$.

On voit aisément que les coefficients des plus hautes puissances de x dans $V, V_1, \ldots, V_h$ peuvent être faits égaux à l'unité.

Je vais démontrer en premier lieu que les normes des nombres complexes

$$V(x_0),\ V_1(x_0),\ \ldots,\ V_h(x_0)$$

sont respectivement divisibles par $p^\nu, p_1^{\nu}, \ldots, p_h^{\nu}$.

Il suffit pour cela de considérer une des fonctions $V, V_1, \ldots,$ par exemple V. Soient

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu$$

les racines de l'équation

$$V = 0;$$

il s'ensuit

$$V(x) = (x_0 - \alpha_1)(x_0 - \alpha_2)\ldots(x_0 - \alpha_\nu).$$

Ainsi l'on aura

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{N}\,V(x_0) = (x_0 - \alpha_1)(x_0 - \alpha_2)\ldots(x_0 - \alpha_\nu) \\ \qquad \times (x_1 - \alpha_1)(x_1 - \alpha_2)\ldots(x_1 - \alpha_\nu) \\ \qquad \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \times (x_{n-1} - \alpha_1)(x_{n-1} - \alpha_2)\ldots(x_{n-1} - \alpha_\nu) \\ \qquad = (-1)^{n\nu}\,F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_\nu). \end{cases}$$

D'ailleurs, la congruence (2) peut être écrite comme il suit :

$$F(x) = V^m V_1^{m_1} \ldots V_h^{m_p} + p\,\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant un polygone à coefficients entiers.

Remplaçant ici x successivement par

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_\nu,$$

on aura, en multipliant les résultats,

$$F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots\,F(\alpha_\nu) = p^\nu \psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_\nu).$$

Par conséquent, en vertu de l'équation (3), il viendra

$$(4) \qquad VN = (-1)^{n\nu} p^\nu\,\psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_\nu).$$

Le produit

$$\psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_\nu)$$

étant un nombre entier, on en conclut que la norme NV est divisible par p^ν. Pareillement, on prouvera que les normes NV_1, NV_2, ..., NV_h sont divisibles respectivement par $p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, \ldots, p^{\nu_h}$.

Je vais établir, en second lieu, que la norme du nombre complexe quelconque $W(x_0)$ n'est divisible par p que dans le cas où la fonction $W(x)$ contient comme facteurs une ou plusieurs des fonctions V, V_1, $V_2, \ldots, V_h$.

En effet, en supposant que $W(x)$ et $F(x)$ n'ont point de facteurs communs suivant le module p, on peut trouver deux polynômes A et B tels, qu'on aura

$$AW - BF(x) \equiv 1 \quad (\text{mod. } p).$$

Il s'ensuit

$$NA\,.\,NW \equiv 1 \quad (\text{mod. } p),$$

et, par conséquent, la norme NW n'est pas divisible par p.

Donc la fonction $W(x)$ doit être nécessairement divisible par l'une des fonctions $V, V_1, \ldots, V_h$ suivant ce module p pour que la norme $NW(x_0)$ soit divisible par p.

Démontrons maintenant que cette condition est suffisante. Supposons, en effet, que $W(x)$ soit divisible suivant le module p par l'une des fonctions $V, V_1, \ldots, V_h$, par exemple par V. On aura alors

$$W(x) = \varphi(x)V + pf(x),$$

$\varphi(x)$ et $f(x)$ étant des polynômes à coefficients entiers. Remplaçant ici x successivement par

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$$

et multipliant les résultats, il viendra

$$NW(x_0) \equiv N\varphi(x_0)NV(x_0) \equiv 0 \pmod{p},$$

car $NV(x_0)$ est divisible par p, comme il a été démontré ci-dessus.

5. En s'appuyant sur les propositions précédentes, on prouvera que l'exposant de la plus haute puissance de p qui divise la norme $NV(x_0)$ est un multiple de ν.

En effet, on voit d'après l'équation (4) que l'exposant avec lequel p entre comme facteur dans NV ne peut surpasser ν que dans le cas où $\psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_\nu)$ sera divisible par p.

Le nombre $\psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_\nu)$ étant la norme du nombre complexe $\psi(\alpha_1)$ relativement à l'équation

$$V = 0,$$

et V étant irréductible suivant le module p, il s'ensuit que

$$\psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_\nu)$$

n'est divisible par p que dans le cas où $\psi(x)$ est divisible par V suivant le module p.

Posons donc

$$\psi(x) = \psi_1(x)V + p\varpi(x),$$

$\psi_1(x)$ et $\varpi(x)$ étant des polynômes à coefficients entiers. Remplaçant ici x successivement par

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu,$$

nous aurons facilement

$$\psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_\nu) = p^\nu \varpi(\alpha_1)\varpi(\alpha_2)\ldots\varpi(\alpha_\nu),$$

d'où il vient

$$NV = (-1)^{\nu n} p^{2\nu} \varpi(\alpha_1)\varpi(\alpha_2)\ldots\varpi(\alpha_\nu),$$

c'est-à-dire que, lorsque la norme V contient comme facteur le nombre p avec l'exposant supérieur à ν, elle est divisible par $p^{2\nu}$.

Par la même analyse, on démontrera la proposition générale.

4. On peut toujours aisément déterminer, comme on va le voir, les modules suivant lesquels la fonction $F(x)$ admet des facteurs multiples.

Soit Δ le discriminant de l'équation

(1) $$F(x) = 0,$$

savoir :

$$\Delta = (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)^2 \ldots (x_{n-2} - x_{n-1})^2.$$

L'équation (1), étant irréductible, n'a pas de racines égales, et, par conséquent, Δ est différent de zéro. Posons

$$\Delta = \pm q_1^{\alpha_1}, q_2^{\alpha_2}, \ldots, q_s^{\alpha_s},$$

$q_1, q_2, \ldots, q_s$ étant des nombres premiers différents.

Nous allons démontrer que la fonction $F(x)$ n'admet des facteurs multiples que suivant les modules $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Considérons, en premier lieu, le nombre premier p, différent de q_1, $q_2, \ldots, q_s$.

Supposant que suivant ce module $F(x)$ a un facteur multiple V^k, il viendra

$$F(x) = \varphi(x) V^k + p\varpi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\varpi(x)$ étant des polynômes à coefficients entiers.

La dérivée

$$F'(x) = \varphi'(x) V^k + k\varphi(x) V^{k-1} V' + p\varpi'(x)$$

sera divisible suivant le module p par V, et, par suite, la norme $\mathrm{N}\,\mathrm{F}'(x_0)$, ou, en d'autres termes, le produit

$$\mathrm{F}'(x_0)\,\mathrm{F}'(x_1)\ldots\mathrm{F}'(x_{n-1})$$

sera divisible par p.

Cette norme étant égale au signe près au discriminant Δ, p doit diviser ce discriminant, ce qui est contraire à la supposition. Il nous reste maintenant à démontrer que $\mathrm{F}(x)$ a effectivement des facteurs multiples suivant chacun des nombres $q_1, q_2, \ldots, q_p$.

En effet, supposant que le contraire ait lieu par rapport au module q_i, on aura

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{V}\mathrm{V}_1\ldots\mathrm{V}_h + q_i\varpi(x)$$

$\mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_h$ désignant des polynômes irréductibles et distincts suivant le module q_i, et $\varpi(x)$ une fonction entière à coefficients entiers. Cela étant, la dérivée $\mathrm{F}'(x)$ n'est divisible suivant le module q_i par aucune des fonctions $\mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_h$.

D'après cela, la norme de nombre complexe $\mathrm{F}'(x_0)$, ou, en d'autres termes, le discriminant Δ, ne sera pas divisible par q_i^2, contrairement à la supposition.

5. Je reprends maintenant la congruence

$$(2)\qquad \mathrm{F}(x) \equiv \mathrm{V}^m\mathrm{V}_1^{m_1}\ldots\mathrm{V}_h^{m_h} \pmod{p}.$$

Elle peut être écrite comme il suit,

$$(3)\qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{V}^m\mathrm{V}_1^{m_1}\ldots\mathrm{V}_h^{m_h} + p\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant un polynôme à coefficients entiers. Les fonctions $\mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_h$ ne sont pas déterminées complètement, car leurs coefficients peuvent être remplacés par les nombres congrus à eux suivant le module p. En faisant usage de cette remarque, il est facile de démontrer que, si l'un des exposants

$$m,\ m_1,\ \ldots,\ m_h,$$

par exemple m, est l'unité, la fonction $\varphi(x)$ peut être supposée non

divisible suivant le module p par un polynôme V correspondant à cet exposant.

En effet, soit $m = 1$ et soit $\varphi(x)$ divisible par V suivant le module p. Cela étant, on peut prendre au lieu de V un polynôme

$$W = V + p\psi(x),$$

$\psi(x)$ désignant une fonction entière à coefficients entiers de degré inférieur à celui de V; W sera aussi une fonction irréductible suivant le module p, et son premier coefficient est égal à l'unité. Remplaçant maintenant dans l'équation (3) la fonction V par W et ayant égard à ce que $m = 1$, nous avons

$$F(x) = W V_1^{m_1} V_2^{m_2} \ldots V_h^{m_h} + p\varphi_1(x),$$

où

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \psi(x) V_1^{m_1} V_2^{m_2} \ldots V_h^{m_h}.$$

La fonction $\varphi(x)$ est divisible, d'après l'hypothèse, par V ou, ce qui est le même, par W suivant le module p; quant à $\psi(x)$, qui reste arbitraire, on peut supposer qu'elle n'est pas divisible par p, et par conséquent, étant du degré inférieur à W, elle ne sera pas divisible par W suivant le module p. Alors la fonction $\varphi_1(x)$ ne sera pas divisible par W. De la même manière on démontrera que, si plusieurs des exposants $m, m_1, m_2, \ldots, m_h$ sont égaux à l'unité, la fonction $\varphi(x)$ de l'équation (3) peut être supposée non divisible par des polynômes de la suite $V, V_1, \ldots, V_h$ correspondant à ces exposants.

J'observe maintenant que dans le cas où $\varphi(x)$ est divisible suivant le module p par l'une des fonctions V, dont l'exposant m surpasse l'unité, la transformation que nous avons employée ci-dessus n'amène pas à la fonction $\varphi_1(x)$ non divisible suivant le module p par V. Alors, la fonction $F(x)$ ayant des facteurs multiples suivant le module p, ce dernier doit être un des nombres

$$q_1, \; q_2, \; \ldots, \; q_s.$$

D'abord, pour plus de simplicité, nous excluons ces cas de notre recherche, puis nous les considérons à part.

6. En étudiant des nombres complexes qui dépendent des racines d'une équation

$$F(x) = 0,$$

nous posons les définitions suivantes :

I. Nous classerons parmi les nombres premiers complexes le nombre premier réel ordinaire p, si $F(x)$ est une fonction irréductible suivant le module p. Tous les autres nombres entiers ordinaires seront dits les *nombres complexes composés*.

La division des nombres complexes en deux classes, celle des nombres premiers et celle des nombres composés, que j'expose dans ce qui va suivre, n'est point basée sur la décomposition ordinaire des nombres en facteurs premiers.

Néanmoins, il est facile de démontrer que les nombres premiers ordinaires, que nous convenons de classer parmi les nombres premiers complexes, ne sont en effet divisibles par aucun nombre complexe distinct de p et des unités complexes.

En effet, supposons que p soit le produit de deux nombres complexes $\varphi(x_0)$ et $\psi(x_0)$. Le produit $\varphi(x_0)\,\psi(x_0)$ étant divisible par p et $F(x)$ une fonction irréductible suivant ce module, on en conclut (**1**) qu'une des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ est divisible par $F(x)$ suivant le module p. En ayant égard à ce que les degrés de ces fonctions peuvent être supposés inférieurs à celui de $F(x)$, on voit que tous les coefficients de l'une d'elles sont divisibles par p. Ainsi l'on aura

$$\varphi(x) = p\,\varphi_1(x),$$

$\varphi_1(x)$ étant un polynôme à coefficients entiers, d'où, en vertu de l'équation

$$p = \varphi(x_0)\,\psi(x_0),$$

il viendra

$$\varphi_1(x_0)\,\psi(x_0) = 1;$$

par conséquent, $\varphi_1(x_0)$ et $\psi(x_0)$ sont des unités complexes.

Le même raisonnement nous conduit au théorème en vertu duquel nous comptons le nombre p parmi les nombres premiers complexes. Voici ce théorème : *Si le produit de deux ou plusieurs nombres com-*

plexes est divisible par un nombre premier ordinaire p suivant lequel $F(x)$ *est une fonction irréductible, un des facteurs est divisible par p.*

II. Examinons maintenant les nombres premiers ordinaires p suivant lesquels $F(x)$ n'est plus irréductible. Dans ce cas, $F(x)$ est décomposable suivant p en facteurs irréductibles. Soit

$$F(x) = V^m V_1^{m_1} \ldots V_h^{m_h} + p\,\varphi(x), \tag{1}$$

$V, V_1, \ldots, V_h$ étant ces facteurs, dont les degrés sont respectivement

$$\nu, \ \nu_1, \ \ldots, \ \nu_h,$$

et $\varphi(x)$ un polynôme à coefficients entiers non divisible suivant le module p par aucune des fonctions $V, V_1, \ldots, V_h$. Nous classerons ce nombre p parmi les nombres complexes composés et nous dirons qu'il contient m facteurs premiers idéaux égaux correspondant à V, m_1 facteurs premiers idéaux égaux correspondant à V_1. Soit $f(x_0)$ un nombre complexe; nous dirons que $f(x_0)$ est divisible par un facteur du nombre p appartenant à V, si $f(x)$ est divisible par V suivant le module p.

7. Maintenant nous allons donner le critérium au moyen duquel on peut toujours reconnaître quels facteurs du nombre p et combien de fois ces facteurs entrent dans un nombre donné $f(x_0)$. Désignons, pour abréger, par $W, W_1, \ldots, W_h$ respectivement les produits

$$V_1^{m_1} V_2^{m_2} \ldots V_h^{m_h}, \quad V^m V_2^{m_2} \ldots V_h^{m_h}, \quad \ldots, \quad V^m V_1^{m_1} \ldots V_{h-1}^{m_{h-1}},$$

et soit λ un nombre entier ordinaire quelconque.

Posons

$$\lambda = km + r,$$

k étant le quotient et r le reste de la division de λ par m. Cela posé, nous dirons que le nombre complexe $f(x_0)$ contient un facteur idéal, appartenant à V, λ fois si la congruence

$$f(x)\, V^{m-r} W^{k+1} \equiv 0 \quad [\text{mod.}\, p^{k+1}, F(x)] \tag{α}$$

est satisfaite, mais la congruence

$$(\beta) \qquad f(x)V^{2m-r-1}W^{k+2} \equiv 0 \quad [\text{mod.}\, p^{k+2}, F(x)]$$

n'ayant pas lieu.

De la même manière on détermine les degrés de multiplicité des autres facteurs idéaux contenus dans $f(x_0)$. Maintenant nous allons établir quelques théorèmes qui feront ressortir toute la portée des facteurs idéaux dans la théorie des nombres complexes.

8. Théorème. — *Si le nombre $f(x_0)$ contient le facteur idéal de p, appartenant à V, λ fois et que le nombre complexe $\psi(x_0)$ ne le contienne point, le produit $f(x_0)\psi(x_0)$ le contient λ fois.*

Soit, comme précédemment,

$$\lambda = km + r.$$

On aura, d'après l'hypothèse,

$$(1) \qquad f(x)V^{m-r}W^{k+1} = p^{k+1}f_1(x) + \varpi(x)F(x),$$

$f_1(x)$ et $\varpi(x)$ étant deux polynômes à coefficients entiers. On voit facilement que $f_1(x)$ n'est pas divisible par V suivant le module p. En effet, dans le cas contraire, le produit

$$p^{k+1}f_1(x)V^{m-1}W = f(x)V^{2m-r-1}W^{k+2} - F(x)\varpi(x)V^{m-1}W$$

serait divisible par p^{k+2}, en faisant abstraction des multiples de $F(x)$, savoir : $f(x_0)$ contiendrait le facteur de p appartenant à V plus de λ fois, ce qui est contraire à la supposition.

En multipliant l'équation (1) par $\psi(x)$, on aura

$$\psi(x)f(x)V^{m-r}W^{k+1} = p^{k+1}f_1(x)\,\psi(x) + \varpi(x)\psi(x)F(x).$$

Cela fait voir que le nombre complexe $\psi(x_0)f(x_0)$ contient le facteur de p appartenant à V au moins λ fois. D'ailleurs, en remarquant que la fonction $f_1(x)\,\psi(x)$ n'est pas divisible par V suivant le module p, on voit que la fonction

$$p^{k+1}f_1(x)\psi(x)V^{m-1}W,$$

ou, ce qui est le même produit,

$$f(x)\psi(x)V^{2m-r-1}W^{k+2},$$

n'est pas divisible par p^{k+2}, en faisant abstraction des multiples de $F(x)$.

Donc le nombre $f(x_0)\psi(x_0)$ contient le facteur idéal de p appartenant à V précisément λ fois.

9. Théorème. — *Le produit $f(x_0)\psi(x_0)$ de deux nombres complexes contient le facteur idéal de p appartenant à V autant de fois que les deux nombres $f(x_0)$ et $\psi(x_0)$ ensemble.*

Supposons que $f(x_0)$ contienne ce facteur λ fois et $\psi(x_0)$ λ' fois. Soient, pour abréger,

$$\lambda = km + r,$$
$$\lambda' = k'm + r';$$

k, k', r, r' sont respectivement les quotients et les restes des divisions de λ et λ' par m.

On a, par hypothèse,

$$(1)\qquad f(x)V^{m-r}W^{k+1} = p^{k+1}f_1(x) + \varpi(x)F(x),$$
$$(2)\qquad \psi(x)V^{m-r'}W^{k'+1} = p^{k'+1}\psi_1(x) + \varpi_1(x)F(x),$$

$f_1(x), \psi_1(x), \varpi(x)$ et $\varpi_1(x)$ étant des polynômes à coefficients entiers; chacune des fonctions $f_1(x)$ et $\psi_1(x)$ n'est pas divisible par V suivant le module p.

Les égalités (1) et (2) nous donnent la suivante,

$$(3)\quad f(x)\psi(x)V^{2m-r-r'}W^{k+k'+2} = p^{k+k'+2}f_1(x)\psi_1(x) + G(x)F(x),$$

$G(x)$ étant encore un polynôme à coefficients entiers.

Maintenant nous avons deux cas à distinguer :

1° $r + r' < m$. En substituant dans l'équation (3) au lieu de $V^m W$ sa valeur

$$-p\varphi(x) + F(x)$$

déduite de l'équation

$$F(x) = V^m V_1^{m_1} \ldots V_h^{m_h} + p\varphi(x),$$

il vient

$$\varphi(x) f(x) \psi(x) V^{m-r-r'} W^{k+k'+1} = -p^{k+k'+1} f_1(x) \psi_1(x) + G_1(x) F(x),$$

$G_1(x)$ désignant aussi un polynôme à coefficients entiers. Il s'ensuit que le produit $f(x_0)\psi(x_0)\varphi(x_0)$ contient le facteur de p appartenant à V un nombre de fois qui est précisément

$$(k+k')m + r + r' = \lambda + \lambda';$$

$\varphi(x_0)$ n'étant pas divisible par ce facteur (n° 6, II), on voit que le produit $f(x_0)\psi(x_0)$ contient le facteur de p, appartenant à V, $\lambda+\lambda'$ fois.

2° $r + r' \geqq m$; d'ailleurs, bien entendu, $r + r' < 2m$. Supposant

$$r + r' = m + \rho,$$

on peut écrire l'égalité (3) comme il suit:

$$f(x) \psi(x) V^{m-\rho} W^{k+k'+2} = p^{k+k'+2} f_1(x) \psi_1(x) + G(x) F(x),$$

d'où l'on voit que le nombre $f(x_0)\psi(x_0)$ contient le facteur de p appartenant à V un nombre de fois qui est

$$(k + k' + 1)m + \rho = \lambda + \lambda'.$$

10. Théorème. — *Si le nombre complexe $f(x_0)$ contient le facteur idéal de p appartenant à V au moins sm fois, s étant un nombre entier, le facteur de p appartenant à V_1 au moins sm_1 fois et ainsi de suite, $f(x_0)$ est divisible par p^s.*

On a, d'après l'hypothèse,

$$f(x) V^m W^{s+1} = p^{s+1} \psi(x) + \varpi(x) F(x),$$

$\varpi(x)$ étant un polynôme à coefficients entiers.

Remarquant que

$$V^m W = -p\varphi(x) + F(x),$$

il vient

$$f(x)\varphi(x)W^s = p^s\psi(x) + \varpi_1(x)F(x),$$

$\varpi_1 x$ étant encore un polynôme à coefficients entiers.

Pareillement, il viendra

$$f(x)\varphi(x)W_1^s = -p^s\psi_1(x) + \varpi_2(x)Fx,$$
$$f(x)\varphi(x)W_2^s = -p^s\psi_2(x) + \varpi_3(x)Fx,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(x)\varphi(x)W_h^s = -p^s\psi_3(x) + \varpi_{s+1}(x)F(x).$$

Par conséquent, le nombre complexe

$$f(x_0)\varphi(x_0)[W^s(x_0) + W_1^s(x_0) + \dots + W_h^s(x_0)]$$

est divisible par p^s. La fonction

$$\varphi(x)(W^s + W_1^s + \dots + W_h^s)$$

n'est divisible suivant le module p par aucune des fonctions

$$V,\ V_1,\ \dots,\ V_h;$$

donc (1) le nombre $f(x_0)$ doit être divisible par p. Soit

$$f(x_0) = pf_1(x_0).$$

Par le même raisonnement, nous ferons voir que $f_1(x_0)$ est aussi divisible par p, savoir $f(x_0)$ divisible par p^2. Ainsi l'on démontrera, en définitive, que $f(x_0)$ est divisible par p^s.

11. Supposons que le nombre complexe $f(x_0)$ contienne le facteur de p, appartenant à V, λ fois; le facteur de p, appartenant à V_1, λ_1 fois, etc. Nous allons démontrer que, dans ce cas, la norme du nombre complexe $f(x_0)$ contient p précisément $\lambda\nu + \lambda_1\nu_1 + \dots + \lambda_h\nu_h$ fois, $\nu, \nu_1, \dots, \nu_h$ étant des degrés des fonctions V, $V_1, \dots, V_h$.

Dans ce but, considérons le nombre complexe

$$f(x_0)V^{mk-\lambda}(x_0)V_1^{m_1k-\lambda_1}(x_0)\dots V_h^{m_hk-\lambda_h}(x_0),$$

k désignant un entier positif satisfaisant aux inégalités

$$mk > \lambda,\quad m_1k > \lambda_1,\quad \dots,\quad m_hk > \lambda_h.$$

Ce nombre complexe contient le facteur idéal de p, appartenant à V, mk fois; le facteur idéal de p, appartenant à V_1, m_1k fois, etc.; par conséquent, il sera de la forme

$$p^k.f_1(x_0),$$

le nombre complexe $f_1(x_0)$ n'étant divisible par aucun des facteurs idéaux de p, ou, ce qui est le même, $f_1(x)$ n'est divisible suivant le module p par aucune des fonctions $V, V_1, \dots, V_h$. Cela posé, on aura

$$\begin{aligned} Nf(x_0)(NV)^{mk-\lambda}(NV_1)^{m_1k-\lambda_1}\dots(NV_h)^{m_hk-\lambda_h} \\ = p^{kn}Nf_1(x_0) = p^{k(m\nu+m_1\nu_1+\dots+m_h\nu_h)}Nf_1(x_0). \end{aligned}$$

Remarquant que les normes

$$NV,\ NV_1,\ \dots,\ NV_h$$

contiennent le facteur p respectivement avec les exposants (2)

$$\nu,\ \nu_1,\ \dots,\ \nu_h,$$

et que la norme $Nf_1(x_0)$ n'est pas divisible par p, on voit que $Nf(x_0)$ contient le facteur p avec l'exposant

$$\lambda\nu + \lambda_1\nu_1 + \dots + \lambda_h\nu_h.$$

Il suit de là que tout nombre complexe contient les facteurs idéaux de nombres premiers ordinaires qui divisent sa norme, chaque facteur un nombre fini de fois, et il ne contient point d'autres facteurs idéaux.

Décomposition des nombres complexes en facteurs premiers idéaux.

12. Les résultats du numéro précédent permettent toujours de reconnaître les nombres ordinaires dont les facteurs idéaux entrent dans le nombre complexe quelconque $\varphi(x_0)$.

On peut les reconnaître encore en opérant comme il suit.

Faisons avec les deux fonctions $\varphi(x)$ et $F(x)$ les divisions successives pour trouver leur plus grand commun diviseur. Comme l'équation

$$F(x) = 0$$

est irréductible, nous allons parvenir au reste constant égal à une fraction rationnelle, car les coefficients de $\varphi(x)$ et $F(x)$ sont des nombres entiers. Il est connu comment on obtient de cette manière deux fonctions entières, à coefficients entiers A et B, telles que la différence

$$A\,F(x) - B\,\varphi(x)$$

est égale à un nombre entier. En désignant ce nombre par M, on aura

$$A\,F(x) - B\,\varphi(x) = M.$$

Si $\varphi(x)$ est divisible par un facteur idéal du nombre premier ordinaire p, les fonctions $\varphi(x)$ et $F(x)$ ont un diviseur commun suivant ce module (6). Ce diviseur doit diviser M. Or, comme M est un nombre entier ordinaire, il doit être divisible par p. Il résulte de là que, pour trouver les facteurs idéaux du nombre complexe $\varphi(x_0)$, nous décomposons d'abord $F(x)$ en facteurs premiers suivant tous les nombres premiers p qui divisent M. Ensuite, en ayant ces décompositions, au moyen du critérium (7), nous trouverons quels facteurs idéaux et combien de fois ces facteurs sont contenus dans $\varphi(x_0)$. Soient $d_1, d_2, \ldots, d_e$ les différents facteurs premiers idéaux du nombre $\varphi(x_0)$, et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, s\lambda_e$ leurs degrés de multiplicité. Nous écrirons

$$(1) \qquad \varphi(x_0) = d_1^{\lambda_1} d_2^{\lambda_2} \ldots d_e^{\lambda_e} \varphi_1(x_0),$$

$\varphi_1(x_0)$ étant une unité complexe quelconque.

Cette équation est, bien entendu, symbolique, car $d_1, d_2, \ldots, d_e$ n'ont pas de valeurs.

L'équation (1) exprime la composition intérieure du nombre complexe $\varphi(x_0)$ et dans la théorie de ces nombres elle représente la généralisation de la décomposition ordinaire des nombres de la forme $a+bi$ en facteurs premiers.

13. De la décomposition des nombres complexes en facteurs idéaux on peut déduire une règle par laquelle on reconnaîtra la divisibilité d'un nombre complexe $\varphi(x_0)$ par un autre $\psi(x_0)$. Supposons que ces nombres, étant décomposés en facteurs idéaux, aient la forme

$$\varphi(x_0) = d_1^{\lambda_1} d_2^{\lambda_2} \ldots d_e^{\lambda_e} \varphi_1(x_0),$$
$$\psi(x_0) = e_1^{\mu_1} e_2^{\mu_2} \ldots e_k^{\mu_k} \psi_1(x_0),$$

$\varphi_1(x_0)$ et $\psi_1(x_0)$ désignant deux unités complexes.

Nous allons démontrer que pour la divisibilité de $\varphi(x_0)$ par $\psi(x_0)$ il faut et il suffit que les facteurs

$$e_1, \; e_2, \; \ldots, \; e_k$$

soient contenus parmi les facteurs

$$d_1, \; d_2, \; \ldots, \; d_e$$

et qu'ils entrent dans $\varphi(x_0)$ avec des exposants non inférieurs respectivement à

$$\mu_1, \; \mu_2, \; \ldots, \; \mu_k.$$

En effet, si $\varphi(x_0)$ est divisible par $\psi(x_0)$, on aura

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0)\,\varpi(x_0),$$

$\varpi(x_0)$ étant un nombre entier complexe.

Il est évident que, dans ce cas, $\varphi(x_0)$ contient tous les facteurs premiers idéaux de $\psi(x_0)$,

$$e_1, \; e_2, \; \ldots, \; e_k,$$

avec les exposants non inférieurs à

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k \quad (\mathbf{9}).$$

Réciproquement, si $\varphi(x_0)$ contient tous les facteurs

$$e_1, e_2, \ldots, e_k$$

et si leurs degrés de multiplicité ne sont pas inférieurs respectivement à

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k,$$

$\varphi(x_0)$ est divisible par $\psi(x_0)$.

En effet, on a

$$\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = \frac{\varphi(x_0)\Psi(x_0)}{\mathrm{N}\psi(x_0)},$$

$\Psi(x_0)$ étant un nombre complémentaire de $\psi(x_0)$, savoir

$$\Psi(x_0) = \psi(x_1)\psi(x_2)\ldots\psi(x_{n-1}).$$

En outre, tout facteur idéal de $\mathrm{N}\psi(x_0)$ entre dans le produit $\varphi(x_0)\Psi(x_0)$ avec un exposant plus grand que dans $\mathrm{N}\psi(x_0)$. Il résulte de là que $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ est un nombre entier complexe (**10**).

Corollaire I. — Si le rapport de deux nombres complexes $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ n'est pas un nombre entier (complexe), aucune puissance $\frac{\varphi^m(x_0)}{\psi^m(x_0)}$ ne peut être un tel nombre. En effet, dans ce cas, $\psi(x_0)$ contient au moins un facteur premier idéal avec un exposant supérieur à celui du même facteur dans $\varphi(x_0)$. La même circonstance aura lieu par rapport aux nombres $\varphi^m(x_0)$ et $\psi^m(x_0)$, et, par conséquent, $\frac{\varphi^m(x_0)}{\psi^m(x_0)}$ n'est point un nombre entier complexe.

On peut établir une propriété des nombres complexes entiers plus générale.

Soit

$$\varphi(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_{n-1} x_0^{n-1}$$

un nombre complexe entier quelconque. Les nombres

$$\varphi(x_0),\ \varphi(x_1),\ \ldots,\ \varphi(x_{n-1}),$$

$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ étant n racines d'une équation fondamentale

$$\mathrm{F}(x) = 0,$$

satisfont évidemment à l'équation de la forme

$$(1)\qquad z^n + q_1 z^{n-1} + \ldots + q_n = 0,$$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ étant des nombres entiers ordinaires.

Maintenant il est facile de démontrer que, si le rapport $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ de deux nombres complexes entiers n'est pas un nombre entier, il ne peut satisfaire à aucune équation de la forme (1). En effet, désignons par d un des facteurs idéaux de $\psi(x_0)$ qui entrent dans $\psi(x_0)$ avec exposant supérieur à celui du même facteur dans $\varphi(x_0)$.

En supposant que la quantité $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ satisfasse à l'équation (1), il vient

$$\varphi^m(x_0) = -q_1\varphi^{m-1}(x_0)\,\psi(x_0) - q_2\varphi^{m-2}(x_0)\,\psi^2(x_0) - \ldots - q_n\psi^n(x_0).$$

Le premier terme de cette équation contient le facteur d moins de fois que le second, ce qui est évidemment impossible.

Corollaire II. — Il suit de la proposition établie dans ce numéro que chaque nombre complexe n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers idéaux. Supposons, en effet, qu'il existe pour un nombre complexe $\varphi(x_0)$ deux décompositions en facteurs premiers idéaux :

$$\varphi(x_0) = d_1^{\lambda_1}\, d_2^{\lambda_2} \ldots d_c^{\lambda_c}\,\varphi_1(x_0),$$
$$\varphi(x_0) = e_1^{\mu_1}\, e_2^{\mu_2} \ldots e_k^{\mu_k}\,\varphi_2(x_0),$$

$\varphi_1(x_0)$ et $\varphi_2(x_0)$ étant des unités complexes.

On voit que les rapports

$$\frac{d_1^{\lambda_1}\, d_2^{\lambda_2} \ldots d_c^{\lambda_c}}{e_1^{\mu_1}\, e_2^{\mu_2} \ldots e_k^{\mu_k}},\qquad \frac{e_1^{\mu_1}\, e_2^{\mu_2} \ldots e_k^{\mu_k}}{d_1^{\lambda_1}\, d_2^{\lambda_2} \ldots d_c^{\lambda_c}}$$

sont des unités complexes. Il en résulte que tous les facteurs idéaux

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k$$

sont renfermés parmi les facteurs

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_e$$

et *vice versa*. Par conséquent, deux suites de facteurs

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k,$$
$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_e$$

doivent être identiques. Donc on peut supposer

$$d_1 = e_1,\quad d_2 = e_2,\quad \ldots,\quad d_e = e_k,\quad e = k.$$

Cela étant, les exposants

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_e$$

ne sont pas inférieurs respectivement à

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_k,$$

parce que le nombre

$$\frac{d_1^{\lambda_1} d_2^{\lambda_2} \ldots d_e^{\lambda_e}}{e_1^{\mu_1} e_2^{\mu_2} \ldots e_k^{\mu_k}}$$

est un nombre entier.

Réciproquement, les exposants

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_k$$

ne sont pas inférieurs respectivement à

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_e,$$

car le nombre

$$\frac{e_1^{\mu_1} e_2^{\mu_2} \ldots e_k^{\mu_k}}{d_1^{\lambda_1} d_2^{\lambda_2} \ldots d^{\lambda_e}}$$

est aussi un nombre entier. Ainsi, nous aurons

$$\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \ldots,$$

et les deux décompositions ne diffèrent entre elles ni par les facteurs idéaux ni par leurs exposants.

14. On déduit de la décomposition des nombres en facteurs premiers idéaux des théorèmes complètement analogues à ceux qui ont lieu pour les nombres entiers ordinaires.

Nous les indiquerons seulement, car leurs démonstrations ne présentent aucune difficulté. Deux nombres complexes sont nommés premiers entre eux s'ils n'ont point de facteurs idéaux communs.

Théorème. — *Si le nombre complexe* $\psi(x_0)$ *premier à* $\varphi(x_0)$ *divise le produit* $\varphi(x_0)\varphi_1(x_0)$, *il divise le nombre* $\varphi_1(x_0)$.

Théorème. — *Si le nombre complexe* $\psi(x_0)$ *est premier par rapport à chacun des nombres complexes* $\varphi(x_0)$, $\varphi_1(x^0)$, $\varphi_2(x_0)$, ..., *il est premier par rapport à leur produit.*

Il est nécessaire maintenant de définir comment on doit concevoir le produit de deux ou de plusieurs facteurs idéaux. Nous avons vu que tout nombre premier idéal tient lieu d'une certaine congruence. L'ensemble des congruences qui se rapportent à deux nombres premiers idéaux est remplacé par un nouveau nombre idéal qui s'appelle le produit de ces deux nombres. Le produit de tous les facteurs premiers idéaux communs à deux nombres s'appelle *leur plus grand commun diviseur.*

Quelques cas particuliers des nombres complexes.

15. Dans les numéros précédents, nous avons considéré les nombres complexes qui dépendent d'une racine de l'équation irréductible

$$F(x) = 0,$$

à coefficients entiers. Dans la théorie de ces nombres, sont contenus,

comme cas particuliers, la théorie de Gauss pour les nombres de la forme $a+bi$ et celle de M. Kummer pour les nombres complexes qui dépendent des racines d'un degré quelconque de l'unité. Nous allons nous arrêter un peu sur ces cas.

Considérons séparément ces deux cas particuliers.

Soient d'abord

$$F(x)=x^2+1,$$

et p un nombre premier ordinaire quelconque.

La fonction x^2+1 peut être irréductible suivant le module p, ou elle est le produit des deux fonctions irréductibles du premier degré.

Dans le dernier cas, la congruence $x^2+1\equiv 0 \pmod{p}$ aura deux racines, et, par conséquent, p doit être égal à 2 ou être de la forme $4n+1$.

Les nombres premiers de la forme $4n+3$ sont donc encore premiers dans la suite des nombres $a+bi$.

De plus, en remarquant que $2=(1+i)(1-i)$, et que tout nombre premier $4n+1$ se représente dans la forme

$$a^2+b^2=(a+bi)(a-bi),$$

on voit que ces nombres sont composés dans l'ensemble des nombres complexes de la forme $a+bi$.

Dans le cas de ces nombres il n'y a point de facteurs idéaux; tous les facteurs premiers sont réels.

16. Avant de considérer les nombres complexes qui dépendent des racines de l'équation

$$\frac{x^n-1}{x-1}=0,$$

nous démontrons quelques théorèmes qui se rapportent à la fonction $\frac{x^n-1}{x-1}$, prise suivant le module premier p.

Si n est divisible par p, on aura, en supposant $n=p^\mu\nu$,

$$x^n-1\equiv(x^\nu-1)^{p^\mu} \pmod{p};$$

par conséquent, il suffit d'examiner la fonction $x^n - 1$ dans la supposition n non divisible par p.

Si $n = p$, il vient

$$x^p - 1 \equiv (x - 1)^p \pmod{p}.$$

Donc la fonction $x^p - 1$ est congrue suivant le module p à la puissance p du facteur $x - 1$.

Maintenant, supposant n non divisible par p, nous allons établir les propositions suivantes.

Remarquons, en premier lieu, que la fonction $x^n - 1$ n'a pas de facteurs multiples suivant le module p.

Théorème I. — *Tout facteur irréductible suivant le module p de la fonction $x^n - 1$ divise aussi la fonction $x^{\lambda n} - 1$, λ étant un nombre entier positif.*

En effet, la fonction $x^n - 1$ divise algébriquement la fonction $x^{\lambda n} - 1$, et, par conséquent, tous les facteurs suivant le module quelconque de la fonction $x^n - 1$ divisent aussi la fonction $x^{\lambda n} - 1$.

Théorème II. — *Chaque diviseur commun des fonctions $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ et $\frac{x^\lambda - 1}{x - 1}$, suivant le module p divise aussi la fonction $\frac{x^\delta - 1}{x - 1}$, δ étant le plus grand commun diviseur des nombres n et λ.*

Soient s et t deux nombres entiers positifs satisfaisant à l'équation

$$sn - t\lambda = \delta.$$

Le diviseur commun des fonctions $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, $\frac{x^\lambda - 1}{x - 1}$ suivant le module p divisera encore, suivant ce module, les fonctions $\frac{x^{sn} - 1}{x - 1}$ et $\frac{x^{t\lambda} - 1}{x - 1}$, et par conséquent leur différence

$$\frac{x^{sn} - x^{t\lambda}}{x - 1} = x^{s\lambda} \frac{x^\delta - 1}{x - 1}.$$

Donc il divisera, suivant le module p, la fonction $\frac{x^\delta - 1}{x - 1}$.

Théorème III. — *Si n est un nombre premier et si p appartient à l'exposant h suivant le module n, h étant, comme on sait, un diviseur de $n-1$, la fonction $\frac{x^n-1}{x-1}$ est congrue suivant le module p au produit de $\frac{n-1}{h}$ fonctions irréductibles de degré h.*

Remarquons en premier lieu que la fonction $\frac{x^n-1}{x-1}$ ne peut avoir aucun diviseur suivant le module p qui ne serait pas du degré h ou de degré multiple de h.

En effet, supposons que la fonction soit divisible suivant le module p par une fonction irréductible de degré ν. Cette fonction divisera aussi suivant le module p la fonction (¹)

$$x^{p^\nu}-x=x(x^{p^\nu-1}-1),$$

et, par conséquent, $p^\nu-1$ est divisible par n, ou, en d'autres termes,

$$p^\nu\equiv 1 \quad (\text{mod. } n).$$

Mais p appartient à l'exposant h; donc ν est divisible par h.

En second lieu, nous allons démontrer que la fonction $\frac{x^n-1}{x-1}$ ne renferme point comme facteur suivant le module p des fonctions irréductibles dont les degrés sont multiples de h et non égaux à h.

A cet effet, remarquons que la fonction $\frac{x^n-1}{x-1}$ divise algébriquement la fonction $x^{p^h}-x=x(x^{p^h-1}-1)$. D'après cela, si une fonction de degré $\nu=\lambda h, \lambda>1$, divise suivant le module p la fonction x^n-1, elle divisera aussi la fonction $x^{p^h}-x$. Mais, h étant inférieur à ν, cela est impossible.

17. On peut, comme nous allons le voir, par un procédé très simple, obtenir des facteurs irréductibles de la fonction $\frac{x^n-1}{x-1}$ suivant le module p. Deux fonctions entières A et B, à coefficients entiers, seront dites

(¹) Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 139.

congrues suivant la fonction entière U, dont les coefficients sont aussi des nombres entiers, si la différence A — B est divisible algébriquement par U. Pour exprimer cette congruence, nous écrivons

$$A \equiv B \,(U).$$

Cela posé, soit

$$U = \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

n étant un nombre premier.

Nous allons démontrer que dans la suite de fonctions

$$(1) \qquad 1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n-1},\ x^n,\ x^{n+1},\ \ldots$$

les n premiers termes sont incongrus entre eux suivant la fonction U. En effet, la différence

$$x^m - x^\nu,$$

m et ν étant inférieurs à n, n'est pas divisible algébriquement par U.

De plus, chaque terme de la suite (1) est congru suivant la fonction U à une des fonctions $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

En effet, soit x^m un terme de la suite (1), m étant supérieur à $n - 1$.

Désignant par s le quotient et par r le reste de la division de m par n, on aura

$$m = sn + r.$$

La différence

$$x^m - x^r = x^r(x^{sn} - 1)$$

est évidemment divisible par U. Donc

$$x^m \equiv x^r (U).$$

Les fonctions $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ peuvent être distribuées *en périodes* [1] comme il suit. Soit

$$n - 1 = ef,$$

e et f étant deux diviseurs de $n - 1$, et désignons par g une racine primitive de nombre n.

---

[1] *Gauss Werke*, Band II, *Solutio congruentiæ* $x^m - 1 \equiv 0$.

Comme nous avons à considérer les congruences suivant la fonction U, on peut prendre, au lieu des fonctions

$$x,\ x^2,\ \ldots,\ x^{n-1},$$

les fonctions

(2) $$x^g,\ x^{g^2},\ \ldots,\ x^{g^{n-1}},$$

car les deux suites se sont composées de termes congrus suivant la fonction U. Désignons maintenant par

$$\xi,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_{e-1}$$

les fonctions suivantes :

(U) $$\left\{\begin{array}{l} \xi \equiv x + x^{g^e} + x^{g^{2e}} + \ldots + x^{g^{(f-1)e}}, \\ \xi_1 \equiv x^g + x^{g^{e+1}} + x^{g^{2e+1}} + \ldots + x^{g^{(f-1)e+1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_{e-1} \equiv x^{g^{e-1}} + x^{g^{2e-1}} + x^{g^{3e-1}} + \ldots + x^{g^{fe-1}}. \end{array}\right.$$

Ces fonctions seront dites les *périodes*. Les fonctions $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{e-1}$ ne sont pas tout à fait déterminées, parce qu'on les obtient au moyen des congruences suivant le module U.

Par rapport aux périodes nous ferons les remarques suivantes :

1° Les périodes

$$\xi,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_{e-1}$$

se déduisent l'une de l'autre par changement de x en x^g; si l'on fait la même substitution dans la période ξ_{e-1}, on aura $\xi_e \equiv \xi(\mathrm{U})$. Puis, en appliquant la même substitution, on reproduira les périodes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{e-1}$.

En général, on aura

$$\xi_{\lambda e+h} \equiv \xi_h \quad (\mathrm{U}).$$

Il suit de là que si l'on remplace x par x^μ, μ satisfaisant à la congruence

$$\mu \equiv g^{\lambda e} \pmod{n},$$

les périodes restent invariables, et, si μ satisfait à la congruence

$$\mu \equiv g^{\lambda e+h} \pmod{n},$$

les périodes $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{e-1}$ se transforment respectivement en

$$\xi_h, \ \xi_{h+1}, \ \ldots, \ \xi_{h+e-1}.$$

En remplaçant enfin, dans la période ξ, x par $x^{\lambda n}$, λ étant un nombre entier positif, on aura la fonction A :

$$\text{(U)} \qquad \mathrm{A} \equiv x^{\lambda n} + x^{\lambda n g^e} + \ldots.$$

La fonction $x^{hn} - 1$ étant divisible par U, il vient

$$\mathrm{A} \equiv f(\mathrm{U}).$$

Donc, en désignant par $[f, \lambda]$ la somme

$$x^{\lambda} + x^{\lambda g^e} + x^{\lambda g^{2e}} + \ldots + x^{\lambda g^{(f-1)e}},$$

on aura

$$\text{(U)} \qquad \xi \equiv [f, 1], \quad \xi_1 \equiv [f, g], \quad \ldots, \quad \xi_{e-1} \equiv [f, g^{e-1}].$$

2° La somme de périodes

$$\text{(U)} \qquad \xi + \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{e-1} \equiv x + x^2 + \ldots + x^{n-1} \equiv -1.$$

3° Si f est le produit de deux nombres entiers b et c, chacune des périodes $[f, 1]$, $[f, g]$, ... contenant f termes se compose de c périodes dont chacune contient b termes, savoir :

$$\begin{aligned} &[f, 1] = [b, 1] + [b, g^e] + [b, g^{2e}] \ldots [b, g^{(c-1)e}], \\ &[f, g] = [b, g] + [b, g^{e+1}] + [b, g^{2e+1}] \ldots [b, g^{(c-1)e+1}], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

4° Maintenant il est aisé de voir que l'ensemble des périodes ne dépend pas de la racine primitive g, choisie arbitrairement.

En effet, soit G une autre racine primitive du nombre n.

Cela posé, nous aurons, comme on sait,

$$\mathrm{G} \equiv g^{\mu} \pmod{n},$$

μ étant un nombre premier avec $n - 1$.

Il suit de là que les résidus minima des nombres $1, g^e, g^{2e}, \ldots, g^{(f-1)e}$ suivant le module n ne sont distincts que par l'ordre des résidus minima des nombres $1, G^e, G^{2e}, \ldots, G^{(f-1)e}$. De plus, les nombres $g^\alpha, g^{e+\alpha}, g^{2e+\alpha}, \ldots, g^{(f-1)e+\alpha}$ sont congrus suivant le module n, en faisant abstraction de l'ordre, aux nombres $G^\beta, G^{e+\beta}, G^{2e+\beta}, \ldots, G^{(f+1)e+\beta}$, lorsque $g^\alpha \equiv G^\beta \pmod{n}$.

De tout cela il résulte que, si l'on change dans les périodes

$$[f, 1],\ [f, g],\ \ldots,\ [f, g^{e-1}]$$

g en G, on ne variera que leur ordre.

18. Démontrons maintenant le théorème fondamental par rapport aux périodes.

Théorème. — *Le produit de deux périodes $[f, \lambda]$ et $[f, \mu]$ égales ou distinctes est congru, suivant la fonction* (U), *à une fonction linéaire des périodes $[f, 1], [f, g], \ldots, [f, g^{e-1}]$, à coefficients entiers.*

En multipliant chaque terme de la période $[f, \mu]$ par la période

$$\text{(U)} \qquad [f, \lambda] \equiv [f, \lambda g^e] \equiv [f, \lambda g^{2e}],$$

on aura

$$\text{(U)} \quad \left\{ \begin{aligned} [f, \lambda]\,[f, \mu] &\equiv [f, \lambda]\, x^\mu + [f, \lambda g^e]\, x^{\mu g^e} + \ldots \\ &\quad + [f, \lambda g^{(f-1)e}]\, x^{\mu g^{(f-1)e}} \\ &\equiv x^{\lambda+\mu} + x^{\lambda g^e+\mu} + \ldots + x^{\lambda g^{(f-1)e}+\mu} \\ &\quad + x^{(\lambda+\mu)g^e} + x^{\lambda g^{2e}+\mu g^e} + \ldots + x^{\lambda g^{fe}+\mu g^e} + \ldots \\ &\quad + x^{(\lambda+\mu)g^{(f-1)e}} + x^{\lambda g^{fe}+\mu g^{(f-1)e}} + \ldots \\ &\quad + x^{\lambda g^{(2f-2)e}+\mu g^{(f-1)e}}, \end{aligned} \right.$$

et par conséquent

$$(1) \quad [f, \lambda]\,[f, \mu] \equiv [f, \lambda + \mu] + [f, \lambda g^e + \mu] + \ldots + [f, \lambda g^{(f-1)e} + \mu].$$

Quelques-unes des périodes $[f, \lambda + \mu], [f, \lambda g^e + \mu], \ldots$ peuvent être congrues entre elles suivant la fonction U; en outre, si

$$\lambda g^{he} + \mu \equiv 0 \pmod{n},$$

il vient

$$(\mathrm{U})\qquad [f, \lambda g^{ke} + \mu] \equiv f.$$

Donc, en général, on aura

$$(2)\quad (\mathrm{U})\qquad [f, \lambda][f, \mu] \equiv af + b\xi + c\xi_1 + \ldots + l\xi_{e-1},$$

$a, b, c, \ldots, l$ étant des nombres entiers.

En multipliant maintenant les deux termes de la congruence (2) par $[f, \nu]$, on aura, à cause de la même formule (2),

$$(\mathrm{U})\qquad [f, \lambda][f, \mu][f, \nu] \equiv a'f + b'\xi + c'\xi_1 + \ldots + l'\xi_{e-1},$$

$a', b', c', \ldots$ étant des nombres entiers.

Par conséquent, si V désigne une fonction entière à coefficients entiers des périodes $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{e-1}$, on peut toujours supposer

$$(\mathrm{U})\qquad \mathrm{V} \equiv \mathrm{A} + \mathrm{B}\xi + \mathrm{C}\xi_1 + \ldots + \mathrm{L}\xi_{e-1},$$

A, B, C, ... étant des nombres entiers.

En attribuant dans la congruence (2) aux nombres λ et μ les différentes valeurs, on aura les congruences qui suivent :

$$(3)\quad (\mathrm{U})\left\{\begin{array}{l} \xi^2 \equiv sf + m\xi + m_1\xi_1 + \ldots + m_{e-1}\xi_{e-1} \\ \xi\xi_1 \equiv s^{(1)}f + m^{(1)}\xi + m_1^{(1)}\xi_1 + \ldots + m_{e-1}^{(1)}\xi_{e-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi\xi_{e-1} \equiv s^{(e-1)}f + m^{(e-1)}\xi + m_1^{(e-1)}\xi_1 + \ldots + m_{e-1}^{(e-1)}\xi_{e-1} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lllll} s, & m, & m_1, & \ldots, & m_{e-1}, \\ s^{(1)}, & m^{(1)}, & m_1^{(1)}, & \ldots, & m_{e-1}^{(1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots \\ s^{(e-1)}, & m^{(e-1)}, & m_1^{(e-1)}, & \ldots, & m_{e-1}^{(e-1)}, \end{array}$$

étant des nombres entiers égaux respectivement à ceux qui figurent dans les formules analogues pour les équations binômes.

De ces congruences on déduit la suivante,

$$(4)\quad (\mathrm{U})\qquad \xi^e + p_1\xi^{e-1} + p_2\xi^{e-2} + \ldots + p_e \equiv 0,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_e$ étant des nombres entiers.

Cette congruence, étant convertie en équation, sera identique à celle dont on se sert pour obtenir les périodes à f termes formées avec des racines de l'équation $\frac{x^n-1}{x-1}=0$. La congruence (4) est satisfaite par toutes les périodes $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{e-1}$.

De plus, en procédant comme dans la théorie des équations binômes, on aura la congruence

$$(\mathrm{U}) \qquad \mathrm{N}\xi_\lambda \equiv a^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)}\xi + a_2^{(\lambda)}\xi^2 + \ldots + a_{e-1}^{(\lambda)}\xi^{e-1},$$

N, $a^{(\lambda)}$, $a_1^{(\lambda)}$, ... étant des entiers.

19. Maintenant, soient p un nombre premier appartenant à l'exposant h suivant le module n, et f un nombre entier divisible par h ou, en d'autres termes, tel qu'on ait $p^f \equiv 1$ (mod. 1). Nous allons étudier les propriétés des périodes par rapport au module p et une fonction P irréductible et divisant la fonction U suivant ce module.

Il est clair que toutes les congruences précédentes suivant la fonction U auront lieu aussi suivant le module p et la fonction P, car U est divisible suivant ce module par P.

Cela posé, on aura le théorème suivant :

Théorème. — *Les périodes $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{e-1}$ sont congrues aux nombres entiers suivant le module p et la fonction* P.

En effet, d'après ce qui précède, on aura

$$\xi \equiv x + x^{g^e} + x^{g^{2e}} + \ldots \quad (\text{mod. } p, \mathrm{P}),$$

d'où il résulte

$$\xi^p \equiv (x + x^{g^e} + x^{g^{2e}} + \ldots)^p \equiv x^p + x^{g^e p} + x^{g^{2e}p} + \ldots \quad (\text{mod. } p, \mathrm{P}).$$

D'ailleurs, il suit de la congruence $p^f \equiv 1$ (mod. n) que p est congru suivant le module n au nombre $g^{\lambda e}$, λ désignant un nombre entier, et, par conséquent

$$(\mathrm{U}) \qquad \xi^p \equiv x^p + x^{g^e p} + \ldots \equiv \xi.$$

Donc il viendra

$$\xi^p \equiv \xi \quad (\text{mod. } p, \mathrm{P}),$$

ou, en d'autres termes, le produit $\xi(\xi-1)\ldots(\xi-p+1)$ est divisible par P suivant le module p.

Mais, P étant une fonction irréductible, l'un des facteurs de ce produit est divisible par P suivant le module p, savoir : ξ est congru à l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1$ suivant le module p et la fonction P.

Cela aura lieu encore par rapport aux autres périodes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{e-1}$.

Soient $u, u_1, \ldots, u_{e-1}$ des nombres entiers congrus aux périodes $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{e-1}$ suivant le module p et la fonction P.

Ces nombres peuvent être déterminés comme il suit.

Nous avons déduit dans le numéro précédent la congruence

$$\text{(U)} \qquad \xi^e + p_1\xi^{e-1} + p_2\xi^{e-2} + \ldots + p_e \equiv 0.$$

Les nombres entiers $p_1, p_2, \ldots, p_e$ satisfont aux congruences

$$\text{(U)} \qquad \left\{\begin{aligned} -p_1 &\equiv \xi + \xi_1 + \ldots + \xi_{e-1},\\ p_2 &\equiv \xi\xi_1 + \xi\xi_2 + \ldots + \xi_{e-2}\xi_{e-1},\\ -p_3 &\equiv \xi\xi_1\xi_2 + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ces congruences nous donnent les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} -p_1 &\equiv u_1 + u_2 + \ldots + u_{e-1},\\ p_2 &\equiv uu_1 + uu_2 + \ldots + u_{e-2}u_{e-1},\\ -p_3 &\equiv uu_1u_2 + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \pmod{p}$$

Il résulte de là que la congruence

$$u^e + p_1u^{e-1} + \ldots + p_e \equiv 0 \pmod{p}$$

est satisfaite par tous les nombre $u, u_1, \ldots, u_{e-1}$.

Ainsi, nous sommes parvenu au théorème de M. Kummer : *L'équation de degré e au moyen de laquelle se trouvent les périodes à f termes formées avec des racines de l'équation* $\frac{x^n-1}{x-1}=0$, *n étant un nombre*

premier, a e racines égales ou inégales, si on la considère comme une congruence suivant le module p tel qu'on ait $p^f \equiv 1$ (mod. n).

Des congruences (3) du numéro précédent on déduit les suivantes :

$$\left.\begin{array}{lllll} u^2 & \equiv sf & + mu & + m_1 u_1 & + \ldots + m_{e-1} u_{e+1} \\ uu_1 & \equiv s^{(1)}f & + m^{(1)}u & + m_1^{(1)}u & + \ldots + m_{e-1}^{(1)} u_{e-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ uu_{e-1} & \equiv s^{(e-1)}f & + m^{(e-1)}u & + m_1^{(e-1)}u_1 & + \ldots + m_{e-1}^{(e-1)} u_{e-1} \end{array}\right\} \pmod{p}$$

Il suit de la définition des nombres $u, u_1, \ldots, u_{e-1}$ que toute fonction entière $\varphi(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{e-1})$ des périodes $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{e-1}$, à coefficients entiers, satisfait à la congruence

$$\varphi(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{e-1}) \equiv \varphi(u, u_1, \ldots, u_{e-1}) \quad (\text{mod. } p, \text{P}).$$

Donc $\varphi(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{e-1})$ sera divisible par P suivant le module p si l'on a

$$\varphi(u, u_1, \ldots, u_{e-1}) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

20. Maintenant nous allons voir comment on obtient les facteurs irréductibles de la fonction U suivant le module premier p.

Supposons que p appartienne à l'exposant h par rapport au module n, et soit $n - 1 = kh$. Désignons par

$$(1)\ (\text{U}) \quad \left\{\begin{array}{lll} [h, 1] & = \eta & \equiv x + x^{g^k} + x^{g^{2k}} + \ldots + x^{g^{(h-1)k}} \\ [h, g] & = \eta_1 & \equiv x^g + x^{g^{k+1}} + x^{g^{2k+1}} + \ldots + x^{g^{(h-1)k+1}} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ [h, g^{k-1}] & = \eta_{k-1} & \equiv x^{g^{k-1}} + x^{g^{2k-1}} + x^{g^{3k-1}} + \ldots + x^{g^{hk-1}} \end{array}\right.$$

les périodes à h termes. Soit encore P un des facteurs irréductibles de la fonction U suivant le module p.

D'après ce qui précède, les périodes $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$ sont congrues suivant la fonction P et le module p aux nombres entiers

$$v, v_1, \ldots, v_{k-1},$$

satisfaisant à la congruence

$$v^k + q_1 v^{k-1} + q_2 v^{k-2} + \ldots \equiv 0 \quad (\text{mod. } q),$$

$q_1, q_2, \ldots, q_k$ étant des nombres entiers.

Maintenant nous allons former la congruence de degré hk suivant le

module p et la fonction P qui aura pour ses racines les fonctions x, x^{g^k}, $x^{g^{2k}}$, ..., $x^{g^{(h-1)k}}$. Cette congruence peut être représentée sous la forme

$$(2)\quad (X-x)(X-x^{g^k})(X-x^{g^{2k}})\ldots(X-x^{g^{(h-1)k}}) \equiv 0 \pmod{p,\ P}.$$

Afin de déterminer les coefficients de cette congruence, on cherche d'abord les sommes de puissances semblables des racines.

En vertu des formules (1) on aura

$$\left.\begin{array}{l} x + x^{g^k} + x^{g^{2k}} + \ldots + x^{g^{(h-1)k}} \equiv [h, 1] \\ x^2 + x^{2g^k} + x^{2g^{2k}} + \ldots + x^{2g^{(h-1)k}} \equiv [h, 2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^h + x^{hg^k} + x^{hg^{2k}} + \ldots + x^{hg^{(h-1)k}} \equiv [h, k] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \pmod{p,\ P}.$$

Les périodes $[h, 1]$, $[h, 2]$, ..., comme nous avons vu plus haut, sont congrues suivant le module p et la fonction P aux nombres ν, ν_1, ..., ν_{h-1}. Comme nous avons désigné par P un facteur irréductible quelconque de U, le nombre ν, congru à la première période $[h, 1]$, peut être choisi arbitrairement dans la suite ν, ν_1, ..., ν_{k-1}. Le nombre ν étant déterminé, on cherche le nombre ν_i congru à la période $[h, g^i]$ au moyen de la liaison qui existe entre les périodes; ν_i dépend de ν tout à fait de la même manière, comme $[h, g^i]$ de $[h, 1]$.

Ainsi on pourra toujours déterminer les sommes de puissances semblables de racines de la congruence (2). Soit

$$X^h + l_1 X^{h-1} + \ldots + l_h \equiv 0 \pmod{p,\ P}$$

cette congruence, l_1, l_2, ..., l_h étant des nombres entiers. En remarquant que cette congruence est satisfaite par la fonction $X = x$, on voit que la fonction $x^h + l_1 x^{h-1} + l_2 x^{h-2} + \ldots + l_h$ est divisible par P suivant le module p.

P étant une fonction irréductible de degré h, on peut toujours prendre

$$P = x^h + l_1 x^{h-1} + l_2 x^{h-2} + \ldots + l_h.$$

En remplaçant ν par d'autres valeurs ν_1, ν_2, ..., ν_{k-1}, on aura les autres fonctions P. (*A suivre.*)

Sur l'Astronomie nautique;

PAR M. H. RESAL.

Dans ces derniers temps, des savants et praticiens de premier ordre se sont fort sérieusement occupés de cette branche des sciences appliquées et lui ont donné une nouvelle impulsion.

Je me bornerai ici à signaler d'abord le remarquable travail de MM. Yvon Villarceau et Aved de Magnac, intitulé *Nouvelle navigation astronomique*. Cet Ouvrage, qui a été publié en 1877, est actuellement trop connu pour que je croie devoir m'y arrêter.

J'arrive maintenant à un nouvel Ouvrage qui m'a vivement intéressé aussi, celui de M. Faye, qui vient de paraître sous le titre d'*Astronomie nautique*, et qui comprend une partie des Leçons professées par l'illustre astronome aux élèves de l'École Polytechnique.

Dans ce Volume, l'auteur expose les notions essentielles d'Astronomie sphérique, l'étude des instruments de mesure, la théorie des erreurs d'observation, les procédés de la navigation par estime et ceux de la navigation astronomique.

Il diffère des Ouvrages antérieurs sur le même sujet par l'emploi systématique des formules fondamentales de la transformation des coordonnées sphériques, formules d'un usage beaucoup plus facile au fond que les moyens plus ou moins détournés dont les marins font un si fréquent usage. La mesure du temps par les chronomètres a été singulièrement simplifiée par les procédés qu'on a adoptés en Angleterre d'après les idées de Lieussou. L'étude des déviations de la bous-

sole, si importante depuis l'introduction du fer par masses énormes dans les navires, a été exposée d'après la théorie de Poisson, sous la forme adoptée par l'Amirauté anglaise. Enfin la question des droites et des cercles de hauteur, si vivement agitée aujourd'hui, a été réduite à ses véritables termes.

Insistons un moment sur les déviations. C'est un point capital qui s'impose désormais à l'attention des marins. A l'époque où Poisson a appliqué, avec un grand sentiment de la réalité, son génie géométrique à cette difficile question, les navires étaient en bois et le fer n'y figurait que pour une bien faible partie de la masse totale. Aujourd'hui ces conditions se trouvent renversées totalement; c'est le bois qui est devenu rare et le fer prédominant. Aussi les déviations sont-elles énormes; sur les cuirassés elles sont devenues menaçantes. Néanmoins la théorie de Poisson tient toujours; mais, pour soumettre à l'analyse un pareil problème, il a fallu des hypothèses dont les incertitudes, autrefois peu influentes, deviennent de plus en plus marquées, et, dans une question de ce genre qui répond aujourd'hui à un danger très sérieux, car il est établi que la majorité des sinistres tiennent à des erreurs de compas, on ne saurait donner trop d'attention aux bases de la seule théorie qui existe, aux observations qui seules permettent de l'appliquer avec quelque sécurité. L'auteur a discuté les unes et les autres de manière à les rendre très aisément accessibles au lecteur. De plus, il a proposé un moyen de contrôle d'une simplicité extrême, qui nous paraît applicable lorsque la mer n'est pas trop agitée : c'est de traîner à la remorque, à la distance où les masses de fer du navire sont sans action sensible, un canot muni d'une boussole à l'aide de laquelle on relève l'orientation du navire pendant qu'à bord on note les indications du compas étalon. On trouvera dans l'Ouvrage de M. Faye d'autres suggestions de ce genre dont les marins sont seuls juges; nous désirons qu'elles soient mises à l'essai.

La théorie des erreurs d'observation, d'après les règles du Calcul des probabilités, est un accessoire devenu aujourd'hui indispensable aux praticiens. Elle a été présentée sous un jour nouveau et offrira peut-être quelque intérêt aux lecteurs du *Journal de Mathématiques*. On sait que le Calcul des probabilités est une science d'origine française qui doit aux travaux de Laplace et de Poisson d'immenses

développements. Cependant les praticiens ont été conduits à délaisser les voies ouvertes par ces grands géomètres pour suivre les idées et les définitions de Gauss. M. Faye a dû adopter cette marche avec quelques modifications. Gauss part de l'hypothèse que la moyenne arithmétique d'une série de mesures relatives à une même grandeur donne nécessairement et en tout cas la valeur *la plus probable* de cette grandeur. Il déduit ensuite de cette hypothèse, par une analyse fort simple, que la loi de probabilité des erreurs de chaque mesure est exprimée par

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx,$$

h étant une constante relative au degré de précision du genre de mesure considéré. On peut ensuite vérifier cette loi théorique par l'étude des erreurs effectivement constatées. M. Faye a adopté la marche expérimentale; il cherche d'abord, dans l'examen de séries d'erreurs se rapportant à des questions fort différentes, s'il existe une loi de probabilité, en prenant pour exemples des observations astronomiques, des mesures de la gravité par le pendule, les déviations observées dans le tir d'armes à feu, etc. Il retrouve ainsi, graphiquement, des courbes de probabilité assurément fort différentes, mais se rapportant toutes à un seul et même type dont l'équation conduit à la loi précédemment énoncée. Il en résulte immédiatement des règles simples pour combiner les observations de la manière la moins exposée aux erreurs et surtout pour apprécier le degré de précision des résultats. Chemin faisant, l'auteur examine à quelles conditions ces règles s'appliquent à la discussion des mesures effectuées et montre que les géomètres n'ont pas raison de soutenir que la méthode des moindres carrés, par exemple, ne s'applique qu'au cas d'un *très grand nombre* de données. Son emploi est légitime, au contraire, chaque fois que les écarts suivent d'assez près la loi de probabilité susdite. Dans le cas contraire, aucune méthode établie *a priori* ne saurait être appliquée; on en est réduit à trier les observations de manière à procurer, si faire se peut, l'élimination des erreurs systématiques dont elles sont affectées.

L'auteur a traité avec beaucoup de soin la navigation lunaire, si

l'on peut employer cette expression par opposition à celle de navigation chronométrique. Il propose aux marins divers perfectionnements essentiellement pratiques pour le calcul des longitudes par les hauteurs de la Lune, ou par les distances de cet astre au Soleil ou aux planètes. Il insiste en particulier sur la nécessité de tenir compte exactement, dans les calculs, de la figure de la Terre et même des erreurs des Tables actuelles, en attendant que celles que le Bureau des Longitudes fait préparer d'après la théorie de Delaunay aient enfin vu le jour.

Sur la manière de présenter la théorie des potentiels d'attraction, dans l'hypothèse, généralement admise, de la discontinuité de la matière;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

1. Les géomètres qui se sont occupés de la théorie des potentiels d'attraction newtonienne, et qui les ont étudiés pour les points situés au dedans des corps mêmes auxquels est due l'attraction dont il s'agit, ont supposé que la matière de ces corps était continue, c'est-à-dire uniformément disséminée à l'intérieur de toute partie, à dimensions infiniment petites, de l'espace qu'ils paraissent remplir. Grâce à cette hypothèse, la densité réelle, rapport de la masse au volume pour un volume infiniment peu étendu en tout sens, a sensiblement, en chaque point des corps, la même valeur que la densité apparente ρ, rapport de la masse d'une particule visible de matière à l'espace total qu'elle semble occuper. On sait qu'alors, pour tout point $M(x, y, z)$ intérieur au corps, le potentiel $V = \int \frac{dm}{r}$, somme des quotients obtenus en divisant la masse dm que contient chaque élément de volume par sa distance r au point M, est sensiblement le même, soit qu'on y comprenne la matière située à l'intérieur d'une sphère d'un rayon imperceptible R décrite autour du point M comme centre, soit qu'on ne l'y comprenne pas. En effet, on reconnaît immédiatement, par une décomposition en couches sphé-

riques concentriques, que la matière considérée donne en tout un potentiel comparable au quotient de sa masse par le rayon R de la sphère qu'elle remplit, c'est-à-dire comparable au produit ρR^2 ; ce potentiel est donc insignifiant, à côté de celui qui est relatif à l'ensemble de toutes les autres parties et qui se trouve généralement de l'ordre du produit de ρ par le carré des dimensions du corps. Alors aussi, le potentiel total V et ses dérivées partielles successives en x, y, z varient graduellement d'une région à l'autre du corps, et l'on démontre notamment que la dérivée première de V, prise à partir du point M le long d'une droite infiniment petite, est proportionnelle à la composante, suivant le même sens, de l'attraction newtonienne qui y serait exercée, sur l'unité de masse, soit par toute la matière du corps, soit seulement, à très peu près, par la portion de cette matière qui est extérieure à la sphère imperceptible de rayon R décrite autour du point M comme centre. Enfin, on sait que la somme des trois dérivées partielles secondes $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$ égale en chaque point $-4\pi\rho$.

Mais ces démonstrations et même leurs résultats semblent perdre toute valeur pratique, quand, de l'avis unanime des savants, on rejette l'hypothèse de la continuité de la matière, et surtout quand on regarde, avec la plupart d'entre eux, les dimensions des dernières particules ou atomes comme de très petites fractions de la distance comprise entre chacune d'elles et ses voisines. Alors, *si l'on continue à définir le potentiel comme on le fait dans les Cours*, cette fonction $V = \int \frac{dm}{r}$, mais surtout ses dérivées partielles de plus en plus élevées, peuvent même cesser d'exister en tant que fonctions utilisables, c'est-à-dire en tant que fonctions variant graduellement à l'intérieur de tout volume peu étendu et jouissant ainsi de la continuité attribuée, dans les diverses branches de la Physique mathématique, aux fonctions qui expriment une manière d'être déterminée, perceptible pour chaque petite région de l'espace. Par exemple, d'après le théorème de Poisson que je viens de rappeler, la somme des trois dérivées $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$ sera nulle dans le vide compris entre deux atomes, et elle égalera en valeur absolue, à l'intérieur de chaque atome, le produit du facteur 4π par la densité énorme de l'atome au point considéré. Les dérivées secondes du

potentiel ne varieront donc pas graduellement. On pourra en dire autant, si le rapport du vide au plein est très considérable, des dérivées premières, composantes de l'attraction, et même du potentiel, puisque, dans le cas extrême où toute la masse serait concentrée en un nombre fini d'atomes sans étendue, le potentiel $\frac{m}{r}$, relatif à un seul atome, deviendrait infini pour $r = 0$. Quand on suppose la densité de chaque atome suffisamment grande par rapport à la densité apparente ρ du corps, le potentiel $V = \int \frac{dm}{r}$, tout en restant fini, devient maximum à l'intérieur de chaque atome du corps, minimum dans chaque intervalle intermoléculaire, et présente ainsi des milliards de variations de sens inverses dans des étendues même imperceptibles.

2. Il est donc nécessaire de faire subir à la définition du potentiel un changement, qui permette à cette notion si importante de subsister, de conserver son véritable sens concret et son utilité pratique, dans toutes les opinions que l'on peut se former touchant la composition des dernières particules de la matière. C'est ce que je me propose de faire ici, en réponse à un désir exprimé par plusieurs géomètres (notamment par M. Gilbert et par M. de Saint-Venant).

Le changement à introduire ressort de l'usage même auquel on emploie le potentiel. On s'est aperçu depuis longtemps que les actions exercées sur une particule de matière sont de deux sortes : les unes, dues à d'autres particules contiguës, se produisent à des distances totalement imperceptibles et ont pour résultantes les forces appelées *pressions, tensions,* etc. ; les autres, régies par la loi de Newton, sont dues aux particules de matière situées à des distances visibles de celle que l'on considère, et leur résultante n'est autre que *la pesanteur* ou plutôt le poids de la particule.

Or, on ne demande au potentiel que de faire connaître la pesanteur existant en chaque point, car dans les équations d'équilibre ou de mouvement qui contiennent ses dérivées, dans celles de l'Hydrostatique par exemple, on ne manque pas de compter en outre les pressions. Donc le potentiel, tel qu'il est conçu naturellement, ne doit pas contenir de terme $\frac{dm}{r}$ ayant à son dénominateur une distance r impercep-

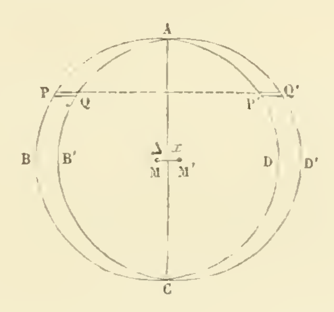
tible. On peut le définir, pour chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace, *la somme qu'on obtient en divisant diverses masses élémentaires considérées, m ou dm, par leurs distances r au point quelconque* M, *et en ajoutant, non pas tous ces quotients, mais ceux-là seulement qui se rapportent à des masses extérieures à la sphère décrite, du point* M *comme centre, avec un rayon imperceptible et constant,* R, *incomparablement plus grand que la distance de deux molécules voisines.* Alors une somme $\sum \frac{m}{r}$ peut, sans difficulté, être remplacée par une intégrale $\int \frac{dm}{r}$, car tous les r y sont assez grands pour ne varier que de fractions insignifiantes de leurs valeurs lorsqu'on suppose chaque atome pulvérisé et disséminé dans l'intervalle intermoléculaire environnant. De plus, on évite les considérations délicates de limites qu'introduit l'annulation de certains dénominateurs dans la théorie ordinaire, où l'on pose finalement $R = 0$.

D'ailleurs, la valeur absolue de R importe peu; dès que ce rayon est supposé tout à la fois incomparablement moindre que les dimensions des corps étudiés et beaucoup plus grand que la distance de deux molécules contiguës, les variations du potentiel en un même point, dues aux variations de R, sont de l'ordre de celles de ρR^2 et totalement négligeables. Il faudrait que R, en diminuant, devînt comparable à l'intervalle qui sépare deux atomes ou tout au moins deux molécules, pour que V pût commencer à augmenter rapidement dans le voisinage de l'une d'elles et à devenir notablement différent en deux points très proches l'un de l'autre, de même qu'une série *semi-convergente,* mais dont la divergence ne s'accentue qu'à partir de termes très éloignés, s'approche longtemps et beaucoup d'une limite, pour s'en écarter ensuite indéfiniment. Dans la question du potentiel, l'hypothèse de la continuité de la matière a pour effet de rendre la somme tout à fait convergente et de permettre ainsi, grâce à l'effacement des attractions locales produit par la pulvérisation fictive de la matière, d'étendre le potentiel à toute la masse sans vicier les résultats particuliers que l'on cherche, c'est-à-dire sans altérer la valeur de la pesanteur en chaque point. Mais il y a dans cette manière de procéder une fiction qu'il importe de bien voir : elle consiste à raisonner comme si l'action de

deux points matériels était régie par la loi de Newton jusqu'aux plus petites distances, hypothèse qui, jointe à celle de la continuité, aurait pour résultat de réduire à rien ces forces qu'on appelle *pressions, tensions, tractions*, etc., et qui sont d'ordinaire les plus considérables ([1]).

3. La définition que je donne du potentiel conduit très simplement et, ce me semble, par la voie la plus naturelle possible, aux propriétés analytiques dont jouit cette fonction.

Proposons-nous d'évaluer d'abord ses dérivées premières, par exemple la dérivée $\frac{dV}{dx}$. A cet effet, j'observerai que le potentiel V vaudra, pour chaque point M (x, y, z), la somme $\int \frac{\rho\, d\omega}{r}$, étendue à tous les éléments de volume $d\omega$ qui sont extérieurs à une sphère ABCD, décrite du point mobile M comme centre avec le rayon constant R. Si M se



déplace d'une petite fraction de R et vient ainsi au point M', qui a les coordonnées $x + \Delta x, y, z$, la sphère se sera transportée en AB'CD', et

---

([1]) Dans la théorie de l'électricité statique, il faut supposer que la pression est insensible à l'intérieur des deux fluides qu'on y conçoit (comme elle le serait dans un gaz sans chaleur), ou, si l'on veut se dispenser de faire explicitement et directement cette hypothèse, il faut admettre à la fois la continuité de ces prétendus fluides impondérables et l'exactitude, jusqu'aux plus petites distances, de la loi newtonienne pour les actions réciproques de leurs diverses parties : suppositions sans grands inconvénients dans l'état actuel de cette branche de la Physique, où l'on en est encore à chercher le principe de la véritable explication des phénomènes.

le potentiel, devenu V + ΔV, s'écrira $\int \frac{\rho\, d\omega}{r'}$, r' désignant la distance à M' des diverses masses, $\rho\, d\omega$, extérieures à cette nouvelle sphère. L'excédant ΔV se composera évidemment : 1° de la somme $\int \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) \rho\, d\omega$ ou $\int \left(\Delta \frac{1}{r}\right) \rho\, d\omega$, étendue à tous les éléments de volume $d\omega$ extérieurs aux deux sphères; 2° de l'excès de la somme $\int \frac{\rho\, d\omega}{r'}$, prise pour tout l'espace ABCB' intérieur à la première sphère et extérieur à la seconde, sur la somme pareille $\int \frac{\rho\, d\omega}{r}$, étendue à l'espace analogue ADCD'.

Comme on a sensiblement, en appelant x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un élément de volume $d\omega$,

$$\Delta \frac{1}{r} = \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \Delta x = \frac{x_1 - x}{r^3} \Delta x,$$

la première partie vaut, sauf une erreur de l'ordre de Δx^2 négligeable à la limite,

$$(1) \qquad (\Delta x) \int \frac{x_1 - x}{r^3} \rho\, d\omega,$$

et l'on peut d'ailleurs y étendre le signe $\int$ à tout l'espace extérieur à la sphère ABCD, car ce qu'on y ajoute de la sorte, relatif à la portion ADCD', est nul à la limite en comparaison du reste.

Occupons-nous actuellement de la seconde partie de ΔV. Divisons l'espace ABCB' en éléments prismatiques PQ, ayant pour hauteur PQ = Δx et pour section normale (infiniment petite en tout sens) la projection de l'élément sur le plan AC parallèle aux yz. Appelons x', y', z' les coordonnées du point P, et prenons, par suite, $dy'\, dz'$ pour section normale du prisme PQ. Comme le rayon R est imperceptible, c'est-à-dire fort petit par rapport aux distances le long desquelles la densité ρ varie notablement, celle-ci a sensiblement au point P la même valeur ρ qu'au centre M de la sphère, et la masse de l'élément PQ

vaut à fort peu près $\rho(\Delta x)dy'dz'$. D'ailleurs, M'Q égalant R, le potentiel relatif à l'élément PQ vaudra, en M', $\frac{\rho\Delta x}{R}dy'dz'$. Par suite, le potentiel relatif à toute la masse comprise dans ABCB' sera $\frac{\rho\Delta x}{R}\int dy'dz'$ ou sensiblement le produit de $\frac{\rho\Delta x}{R}$ par l'aire πR^2 du cercle AC d'intersection des deux sphères. Retranchons-en la somme $\int\frac{\rho\, d\omega}{r}$ prise pour les éléments $d\omega$ de l'espace ADCD', somme qui vaudra également $\pi R\rho\Delta x$, et nous verrons que la deuxième partie de ΔV est d'un ordre de petitesse supérieur à Δx ou, par suite, est négligeable.

Égalons donc ΔV à (1), et faisons tendre Δx vers zéro. Il viendra, comme valeur de la dérivée du potentiel suivant le sens des x,

$$(2)\qquad \frac{dV}{dx}=\int\frac{x_1-x}{r^3}\rho\, d\omega;$$

la somme $\int$, dans le second membre, s'étend à tous les éléments de volume $d\omega$ extérieurs à la sphère décrite du point M comme centre avec le petit rayon constant R. On voit que la dérivée du potentiel le long d'une droite infiniment petite représente la composante, suivant la direction de cette droite, de la *pesanteur* qui existe en chacun de ses points, c'est-à-dire la composante de l'attraction totale qui y serait exercée sur l'unité de masse d'un atome par toute la matière *située à des distances perceptibles de cet atome.*

4. Les dérivées secondes s'obtiennent en procédant exactement de la même manière. Cherchons, par exemple, de combien croît l'expression (2) de $\frac{dV}{dx}$ quand le point M se déplace et vient en M'. La variation éprouvée $\Delta\frac{dV}{dx}$ se compose encore de deux parties.

La première n'est autre que la somme $\int\left(\Delta\frac{x_1-x}{r^3}\right)\rho\, d\omega$, prise pour tous les éléments de volume $d\omega$ extérieurs aux deux sphères. Comme

on a sensiblement

$$\Delta \frac{x_1 - x}{r^3} = \frac{d \dfrac{x_1 - x}{r^3}}{dx} \Delta x = \left[3 \frac{(x_1 - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] \Delta x,$$

cette première partie peut s'écrire

$$(3) \qquad (\Delta x) \int \left[3 \frac{(x_1 - x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right] \rho \, d\omega,$$

et l'on n'altère sa valeur que dans un rapport nul à la limite, en y étendant l'intégration $\int$ à tous les éléments de volume $d\omega$ extérieurs à la sphère ABCD, c'est-à-dire en y comprenant même l'espace ADCD'.

Quant à la seconde partie, elle est l'excédant de l'expression $\int \frac{x_1 - x - \Delta x}{r'^3} \rho \, d\omega$ ou sensiblement $\int \frac{x_1 - x}{r^3} \rho \, d\omega$, prise pour tous les éléments $d\omega$ de l'espace ABCB', sur l'expression analogue relative aux éléments de l'espace pareil ADCD'. Considérant, en particulier, l'élément PQ du premier de ces espaces, substituons dans $\frac{x_1 - x}{r^3} \rho \, d\omega$ sa coordonnée x' à x_1, mettons de même pour r sa distance à M, $MP = R$, pour $d\omega$ la valeur $dy' dz' \Delta x$, et enfin, pour la densité de la matière en P, la densité très peu différente, ρ, relative au point M. Le terme de l'expression proposée qui se rapporte à PQ sera ainsi

$$\frac{\rho \Delta x}{R^3} (x' - x) dy' dz' = -\frac{\rho \Delta x}{R^3} \sqrt{R^2 - (y' - y)^2 - (z' - z)^2} \, dy' dz'.$$

Considérons actuellement, dans le second espace ADCD', l'élément de volume P'Q', symétrique de PQ par rapport au plan AC. Le terme analogue qui lui est relatif ne différera du précédent qu'en ce que $x' - x$ y aura signe contraire ou vaudra $+\sqrt{R^2 - (y' - y)^2 - (z' - z)^2}$. La différence des deux termes égalera donc

$$(4) \qquad -\frac{2 \rho \Delta x}{R^3} \sqrt{R^2 - (y' - y)^2 - (z' - z)^2} \, dy' dz'$$

et la seconde partie cherchée de $\Delta \frac{dV}{dx}$ sera l'intégrale des valeurs que reçoit cette expression quand on y fait varier y', z' dans tout l'intérieur du cercle AC, dont l'équation est $(y'-y)^2+(z'-z)^2 = R^2$. Si nous prenons pour nouvelles variables les coordonnées polaires ι, θ que définissent les relations

$$\iota = \sqrt{(y'-y)^2+(z'-z)^2}, \quad \theta = \text{arctang}\frac{z'-z}{y'-y},$$

le radical de (4) deviendra $\sqrt{R^2-\iota^2}$ et l'élément d'aire $dy'dz'$ sera remplacé par le rectangle mixtiligne $\iota d\theta d\iota$. Comme, d'ailleurs, θ variera de zéro à 2π et ι de zéro à R, l'expression (4) intégrée vaudra

$$(5)\quad -\frac{4\pi\rho\Delta x}{R^3}\int_0^R \sqrt{R^2-\iota^2}\,\iota\,d\iota = \frac{4\pi\rho\Delta x}{3R^3}\Big[(R^2-\iota^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^R = -\frac{4\pi\rho}{3}\Delta x.$$

En l'ajoutant à (3) et divisant le tout par Δx, il vient

$$(6)\qquad \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{4\pi\rho}{3} + \int\left[3\frac{(x_1-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right]\rho\,d\omega.$$

On trouvera des valeurs analogues pour $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$, et leur addition à (6) donnera finalement la formule de Poisson

$$(7)\qquad \frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho.$$

5. Il est à peine nécessaire, en terminant, de faire observer que la petite sphère *mobile* considérée ici, et qui, décrite autour du point (x, y, z) comme centre, entoure une matière dont on fait abstraction dans le calcul du potentiel, n'a rien de commun avec la petite sphère *fixe*, comprenant actuellement le point mobile (x, y, z), que les auteurs classiques emploient pour démontrer le théorème de Poisson dans l'hypothèse d'une matière continue. Cette dernière sphère, à cause de la supposition simplificatrice permise qui s'y joint d'une den-

sité constante à son intérieur, constitue un artifice ingénieux de démonstration, mais rien de plus. Au contraire, l'introduction de la sphère mobile, outre qu'elle conduit au théorème de Poisson sans exiger aucun calcul de potentiel total ni de composantes totales d'attraction pour une sphère homogène, est surtout un moyen de transformer la notion même du potentiel, ou mieux, comme on a vu, de la ramener à son vrai sens, et de l'utiliser pour une matière quelconque, continue ou discontinue.

Rien n'empêche, en effet, de l'appliquer même au cas extrême, le seul qu'eussent traité jusqu'ici les géomètres, où, la matière étant supposée continue et d'une densité partout finie, on pose finalement $R = 0$, en étendant le potentiel V aux éléments de masse intérieurs à la sphère mobile de rayon R qu'on avait d'abord imaginée. Car, non seulement l'intégrale $\int \frac{\rho\, d\omega}{r}$ (prise pour tout l'intérieur de cette sphère), qu'on ajoute ainsi au potentiel, est, comme on sait, de l'ordre de ρR^2, c'est-à-dire aussi petite que l'on veut si R avait été choisi assez faible, mais, de plus, les dérivées successives de cette intégrale sont de nouvelles intégrales de la même forme qu'elle et, par suite, également négligeables. On le reconnaît en observant que chaque élément $d\omega$ de la capacité de la sphère, c'est-à-dire, du volume constant qu'elle emporte, vient être occupé, après un petit déplacement, dx par exemple, du centre (x, y, z), par une matière dont la densité n'est plus ρ, mais $\rho + \frac{d\rho}{dx_1} dx$, en sorte que, si l'on pose $\frac{d\rho}{dx_1} = \rho_1$, l'élément correspondant $\frac{\rho\, d\omega}{r}$ de la petite intégrale aura crû de $\frac{\rho_1\, d\omega}{r} dx$. Il en résulte que l'intégrale elle-même aura grandi de $dx \int \frac{\rho_1\, d\omega}{r}$; elle a donc sa dérivée en x égale à $\int \frac{\rho_1\, d\omega}{r}$, c'est-à-dire de même forme que $\int \frac{\rho\, d\omega}{r}$, et cette dérivée est bien très petite quand ρ varie graduellement. Ainsi, dans l'hypothèse d'une matière continue, le potentiel et ses dérivées partielles successives tendent vers des limites déterminées, quand R tend vers zéro, et toutes les propriétés dont jouissent ces fonctions pour R très petit se conservent à l'instant où R s'annule.

Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier;

PAR M. LAGUERRE.

L'étude du développement en fractions continues d'une fonction d'une variable conduit, dans un très grand nombre de cas, à la considération d'équations différentielles linéaires et du second ordre. Elles ont pour solutions les polynômes qui forment les dénominateurs des diverses réduites.

Dans deux Notes précédemment publiées ([1]), j'ai déterminé la forme de ces équations; pour résoudre complètement le problème, il reste à déterminer les coefficients des polynômes qui entrent dans leur expression.

Ce problème présente d'assez grandes difficultés et j'ai essayé de le résoudre dans la Note qui suit; j'y traite seulement le développement de la fonction $e^{F(x)}$, où $F(x)$ désigne un polynôme entier d'un degré quelconque, et je fais l'application de la théorie générale au cas où $F(x)$ est du second degré.

([1]) *Sur l'approximation des fonctions d'une variable au moyen des fractions rationnelles* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. V, p. 78).

Sur l'approximation de diverses transcendantes qui renferment comme cas particulier les intégrales hyperelliptiques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*).

I.

1. Soit $F(x)$ un polynôme entier du degré m; posons

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} + (x^{2n+1})\text{ [1]},$$

$\varphi_n(x)$ et $f_n(x)$ désignant des polynômes du degré n.

On en déduit

$$F(x) = \log\varphi_n(x) - \log f_n(x) + (x^{2n+1}),$$

puis, en prenant les dérivées des deux membres,

$$F'(x) = \frac{\varphi'_n(x)}{\varphi_n(x)} - \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} + (x^{2n})$$

et

$$F'(x)\varphi_n(x)f_n(x) - \varphi'_n(x)f_n(x) + \varphi_n(x)f'_n(x) = x^{2n}\Theta_n(x),$$

$\Theta_n(x)$ désignant un polynôme du degré $(m-1)$, qui généralement ne sera pas divisible par x.

Si, dans cette relation, on considère $f_n(x)$ et $\Theta_n(x)$ comme connus, on a, pour déterminer $\varphi_n(x)$, une équation linéaire et du premier ordre. En l'intégrant d'abord, en négligeant le second membre, on aura

$$(1)\qquad \varphi_n(x) = e^{F(x)} f_n(x) z,$$

et z sera, comme on le sait, déterminé par la relation

$$(2)\qquad -z = \int \frac{e^{-F(x)} x^{2n}\Theta_n(x)\,dx}{f_n^2(x)}.$$

En désignant par α, β, ... les diverses racines de l'équation

---

[1] Dans tout ce qui suit, je désigne généralement par (x^p) une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et commençant par un terme en x^p, sans avoir égard aux valeurs des coefficients de cette série.

$f_n(x) = 0$, posons l'identité

$$\frac{x^{2n}\Theta_n(x)}{f_n^2(x)} = P + \sum \frac{p}{(x-\alpha)^2} + \sum \frac{q}{x-\alpha},$$

où P est un polynôme du degré $(m-1)$ en x.

On en déduit

$$-z = \int e^{-F(x)} P\, dx + \sum \int \frac{e^{-F(x)} p\, dx}{(x-\alpha)^2} + \sum \int \frac{e^{-F(x)} q\, dx}{x-\alpha},$$

ou encore, en intégrant par parties le deuxième terme du second membre de la relation précédente,

$$-z = \int e^{-F(x)} P\, dx - \sum \frac{e^{-F(x)} p}{x-\alpha} + \sum \int e^{-F(x)} \frac{q - pF'(x)}{x-\alpha}\, dx,$$

ou encore

$$-z = \int e^{-F(x)} P\, dx - \sum \frac{p\, e^{-F(x)}}{x-\alpha} - \sum \int e^{-F(x)} \frac{p[F'(x) - F'(\alpha)]}{x-\alpha}\, dx$$
$$+ \sum \int e^{-F(x)} \frac{q - p F'(\alpha)}{x-\alpha}\, dx.$$

Or la valeur de z ne peut, comme cela résulte de l'équation (1), renfermer d'autre transcendante que la fonction $e^{F(x)}$; on a donc, pour toutes les racines de l'équation $f_n(x) = 0$,

$$q - p\, F'(\alpha) = 0.$$

Un calcul facile donne

$$\frac{p}{f'_n(\alpha)} = \frac{q}{\left[\frac{2n}{\alpha} + \frac{\Theta'_n(\alpha)}{\Theta_n(\alpha)}\right] f'_n(\alpha) - f''_n(\alpha)},$$

d'où il suit que le polynôme $f_n(x)$ satisfait à une équation linéaire et du second ordre de la forme

$$y'' - \left[\frac{2n}{x} + \frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} - F'(x)\right] y' - \frac{H_n(x)}{x\,\Theta_n(x)} y = 0, \tag{3}$$

où $H_n(x)$ désigne un polynôme entier en x du degré $2(m-1)$.

2. L'équation (3) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{F(x)} y'}{x^{2n}\Theta_n(x)}\right] - K(x) y = 0.$$

On en conclut qu'une seconde solution de cette équation est donnée par la formule

$$y = f_n(x)\int \frac{e^{-F(x)} x^{2n}\Theta_n(x)\,dx}{f_n^2(x)}$$

ou, en vertu des relations (1) et (2),

$$y = \varphi_n(x) e^{-F(x)}.$$

3. C'est sur cette importante propriété que je m'appuierai pour déterminer les coefficients des polynômes $\Theta_n(x)$ et $H_n(x)$.

A cet effet, je remarque que $f_{n-1}(x)$ satisfait à l'équation

$$(4)\qquad u'' - \left[\frac{2(n-1)}{x} + \frac{\Theta'_{n-1}(x)}{\Theta_n(x)} - F'(x)\right] - u' - \frac{H_{n-1}(x)}{x\,\Theta_{n-1}(x)}\,u = 0,$$

dont une seconde solution est

$$u = \varphi_{n-1}(x)\,e^{-F(x)}.$$

Formons l'équation linéaire et du quatrième ordre $\Omega = 0$, à laquelle satisfait l'expression

$$z = uy;$$

la solution la plus générale de cette équation est, en désignant par A, B, C et D quatre constantes arbitraires,

$$\begin{aligned} &A f_n(x) f_{n-1}(x) + B f_n(x)\varphi_{n-1}(x) e^{-F(x)} \\ &\qquad + C f_{n-1}(x)\varphi_n(x) e^{-F(x)} + D\varphi_n(x)\varphi_{n-1}(x) e^{-2F(x)}. \end{aligned}$$

En particulier, elle est satisfaite par l'expression

$$e^{-F(x)}[f_n(x)\varphi_{n-1}(x) - f_{n-1}(x)\varphi_n(x)],$$

dont il est facile d'obtenir la valeur en se servant d'une des propriétés les plus élémentaires des fractions continues.

Ayant en effet

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} + (x^{2n+1})$$

et

$$e^{F(x)} = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)} + (x^{2n-1}),$$

on en déduit

$$\frac{\varphi_{n-1}(x)}{f_{n-1}(x)} - \frac{\varphi_n(x)}{f_n(x)} = (x^{2n-1}),$$

d'où

$$f_n(x)\,\varphi_{n-1}(x) - f_{n-1}(x)\,\varphi_n(x) = \mathrm{M}x^{2n-1},$$

M désignant une quantité constante.

4. De là résulte que l'équation $\Omega = 0$ est identiquement satisfaite quand on y fait

$$z = e^{-F(x)}\, x^{2n-1},$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'en établissant certaines relations entre les coefficients des polynômes inconnus $\Theta_n(x)$, $\mathrm{H}_n(x)$, $\Theta_{n-1}(x)$ et $\mathrm{H}_{n-1}(x)$.

Mais, pour obtenir ces relations, il est plus commode de transformer d'abord les équations (3) et (4). A cet effet, je poserai

$$y = x^n\sqrt{\Theta_n(x)}\, e^{-\frac{F(x)}{2}}\, \mathrm{Y}$$

et

$$u = x^n\sqrt{\Theta_{n-1}(x)}\, e^{-\frac{F(x)}{2}}\, \mathrm{U}.$$

En faisant, pour abréger,

$$\mathrm{R} = \left[\frac{n}{x} + \frac{1}{2}\frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} - \frac{F'(x)}{2}\right]^2 + \frac{n}{x^2} + \frac{F''(x)}{2} - \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\frac{\Theta'_n(x)}{\Theta_n(x)} + \frac{\mathrm{H}_n(x)}{x\Theta_n(x)}$$

et

$$\mathrm{S} = \left[\frac{n-1}{x} + \frac{1}{2}\frac{\Theta'_{n-1}(x)}{\Theta_{n-1}(x)} - \frac{F'(x)}{2}\right]^2 + \frac{n-1}{x^2} + \frac{F''(x)}{2} - \frac{d}{dx}\,\frac{1}{2}\frac{\Theta'_{n-1}(x)}{\Theta_{n-1}(x)} + \frac{\mathrm{H}_{n-1}(x)}{x\Theta_{n-1}(x)},$$

les équations (3) et (4) deviennent respectivement

(5) $$Y'' = RY,$$

et

(6) $$U'' = SY.$$

Formons maintenant l'équation linéaire et du quatrième ordre à laquelle satisfait l'expression

(7) $$Z = YU;$$

ayant identiquement

$$yu = x^{2n-1} e^{-F(x)} \sqrt{\Theta_n(x)\,\Theta_{n-1}(x)}\,.\,Z,$$

et $x^{2n-1} e^{-F(x)}$ étant une valeur de yu, on voit que l'équation différentielle en Z a pour solution

$$\frac{1}{\sqrt{\Theta_n(x)\,\Theta_{n-1}(x)}}.$$

5. Faisant, dans ce qui suit,

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\Theta_n(x)\,\Theta_{n-1}(x)}},$$

on obtiendra facilement une relation linéaire entre Z et ses trois premières dérivées.

De l'équation (7) on déduit en effet

(8) $$Z' = YU' + UY',$$

puis, en vertu des équations (5) et (6),

(9) $$Z'' - (R + S)Z = 2Y'U';$$

puis, en dérivant une troisième fois,

(10) $$Z''' - (R + S)Z' - (R' + S')Z = 2RYU' + 2SUY',$$

et enfin

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & Z^{\text{IV}} - 2(R+S)Z'' - 2(R'+S')Z' \\ & \qquad + [(R-S)^2 - R'' - S'']Z = 2R'YU' + 2SUY'. \end{aligned}\right.$$

Si maintenant, entre les équations (8), (10) et (11), nous éliminons les quantités YU' et UY', nous obtiendrons la relation cherchée

$$\begin{vmatrix} Z' & 1 & 1 \\ Z''' - (R+S)Z' - (R'+S')Z & 2R & 2S \\ Z^{\text{IV}} - 2(R+S)Z'' - 2(R'+S')Z' + [(R-S)^2 - R'' - S'']Z & 2R' & 2S' \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$R + S = G \quad \text{et} \quad R - S = K,$$

$$(12)\quad Z^{\text{IV}} - \frac{K'}{K}Z''' - 2GZ'' + \left(2G\frac{K'}{K} - 3G'\right)Z' + \left(K^2 + \frac{G'K'}{K} - G''\right)Z = 0.$$

6. La relation précédente peut, comme il est facile de le vérifier, se mettre sous la forme suivante :

$$(13)\qquad \frac{d}{dx}\left(GZ^2 - ZZ'' + \frac{1}{2}Z'^2\right) = KZ\int KZ\,dx.$$

Je remarquerai d'abord que, le premier membre de cette identité étant une fonction rationnelle de x, l'intégrale $\int KZ\,dx$ ne doit renfermer aucune partie transcendante, et de là découlent immédiatement un certain nombre de relations entre les coefficients des polynômes $\Theta_n(x)$, $H_n(x)$, $\Theta_{n-1}(x)$ et $H_{n-1}(x)$. En second lieu, cette intégrale ne doit renfermer aucune quantité constante; en effet, le produit de cette constante par KZ donnerait une quantité irrationnelle qui ne peut exister dans l'expression $\frac{d}{dx}\left(GZ^2 - ZZ'' + \frac{1}{2}Z'^2\right)$.

En intégrant la relation (13), il vient, en désignant par β une constante convenablement choisie,

$$2\beta + GZ^2 - ZZ'' + \tfrac{1}{2}Z'^2 = \tfrac{1}{2}\left(\int KZ\,dx\right)^2,$$

et encore

$$(14)\qquad \frac{1}{Z}\int KZ\,dx = \sqrt{\frac{4\beta}{Z^2} + 2G - \frac{2Z''}{Z} + \frac{Z'^2}{Z^2}}.$$

Le premier membre de cette identité étant une fonction rationnelle de x, il en résulte que l'expression rationnelle

$$\frac{4\beta}{Z^2} + 2G - \frac{2Z''}{Z} + \frac{Z'^2}{Z^2}$$

est un carré parfait.

II.

7. Comme application des résultats obtenus, je ferai

$$F(x) = x^2 + 2ax,$$

a désignant une constante arbitraire.

On voit que, dans ce cas, $f_n(x)$ satisfait à une équation différentielle de la forme

$$y'' - \left(\frac{2n}{x} + \frac{1}{x - \alpha_n} - 2x - 2a\right)y' - \left(2n + \frac{P_n}{x} + \frac{Q_n}{x - \alpha_n}\right)y = 0;$$

on a

$$\Theta_n(x) = x - \alpha_n,$$

et le problème à résoudre consiste à déterminer les coefficients α_n, P_n et Q_n.

8. On a

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{n}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x - \alpha_n} - x - a\right)^2 + 2n + 1 + \frac{n}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x - \alpha_n)^2} + \frac{P_n}{x} + \frac{Q_n}{x - \alpha_n} \\ &= x^2 + 2ax + a^2 + \left(P_n - 2na - \frac{n}{\alpha_n}\right)\frac{1}{x} + \frac{n(n+1)}{x^2} \\ &\quad + \left(Q_n + \frac{n}{\alpha_n} - \alpha_n - a\right)\frac{1}{x - \alpha_n} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x - \alpha_n)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S = x^2 + 2ax + a^2 &+ \left[P_{n-1} - 2(n-1)a - \frac{n-1}{\alpha_{n-1}}\right]\frac{1}{x} + \frac{n(n-1)}{x^2} \\ &+ \left(Q_{n-1} + \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} - \alpha_{n-1} - a\right)\frac{1}{x - \alpha_{n-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x - \alpha_{n-1})^2}. \end{aligned}$$

On en déduit, en posant, pour abréger l'écriture,

$$P_n + P_{n-1} - 2(2n-1)a - \frac{n}{\alpha_n} - \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} = A,$$

$$Q_n + \frac{n}{\alpha_n} - \alpha_n - a = B,$$

$$Q_{n-1} + \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} - \alpha_{n-1} - a = C$$

et

$$P_n - P_{n-1} - 2a - \frac{n}{\alpha_n} + \frac{n-1}{\alpha_{n-1}} = D,$$

les formules suivantes :

$$G = 2x^2 + 4ax + 2a^2 + \frac{A}{x} + \frac{2n^2}{x^2} + \frac{B}{x-\alpha_n} + \frac{C}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2}$$

et

$$K = \frac{D}{x} + \frac{2n}{x^2} + \frac{B}{x-\alpha_n} - \frac{C}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2}.$$

9. On a

$$Z = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1})}}.$$

Posons

$$(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1}) = \Delta, \quad \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{2} = p, \quad \alpha_n \alpha_{n-1} = q \quad \text{et} \quad \alpha_n - \alpha_{n-1} = \omega;$$

il viendra

$$\int KZ\,dx = D\int \frac{dx}{x\sqrt{\Delta}} + 2n\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\Delta}} + B\int \frac{dx}{(x-\alpha_n)\sqrt{\Delta}} - C\int \frac{dx}{(x-\alpha_{n-1})\sqrt{\Delta}} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x-\alpha_n)^2\sqrt{\Delta}} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x-\alpha_{n-1})^2\sqrt{\Delta}},$$

ou, en effectuant les intégrations,

$$\int KZ\,dx = \left(D + \frac{n}{\alpha_n} + \frac{n}{\alpha_{n-1}}\right)\int \frac{dx}{x\sqrt{\Delta}} - \frac{2n\sqrt{\Delta}}{qx} - \frac{2B}{\omega\sqrt{\Delta}}(x-\alpha_{n-1}) - \frac{2C}{\omega\sqrt{\Delta}}(x-\alpha_n) - \frac{1}{2\omega}\frac{\sqrt{\Delta}}{(x-\alpha_n)^2} - \frac{1}{2\omega}\frac{\sqrt{\Delta}}{(x-\alpha_{n-1})^2} + \frac{1}{\omega^2}\frac{x-\alpha_{n-1}}{\sqrt{\Delta}} - \frac{1}{\omega^2}\frac{x-\alpha_n}{\sqrt{\Delta}}.$$

Comme cette intégrale ne doit pas contenir de partie transcendante, on a

(15) $$D = -n\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right),$$

d'où

(16) $$P_n = P_{n-1} + 2a - \frac{2n-1}{\alpha_{n-1}}$$

et

(17) $$A = 2P_n - 4na - n\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right).$$

10. On a

$$\frac{-1}{Z}\int KZ\,dx = 2Mx - 2N + \frac{2n}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-\alpha_n} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-\alpha_{n-1}},$$

relation où j'ai posé, pour abréger,

$$M = \frac{n}{\alpha_n\alpha_{n-1}} + \frac{B+C}{\omega}, \quad N = n\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) + \frac{B\alpha_{n-1} + C\alpha_n}{\omega},$$

puis

$$\begin{aligned}
&\frac{4\beta}{Z^2} + 2G - \frac{2Z''}{Z} + \frac{Z'^2}{Z^2} \\
&\quad = 4\beta\Delta + 2G + \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{5}{4}\frac{\Delta'^2}{\Delta^2} \\
&\quad = 4\beta(x^2 - 2px + q) + 4x^2 + 8ax + 4a^2 \\
&\qquad + \frac{2A}{x} + \frac{4n^2}{x^2} + \frac{2B}{x-\alpha_n} + \frac{2C}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-\alpha_n}\right)^2 \\
&\qquad + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2} - \frac{5}{4}\frac{1}{(x-\alpha_n)^2} - \frac{5}{4}\frac{1}{(x-\alpha_{n-1})^2} - \frac{1}{2\omega(x-\alpha_n)} + \frac{1}{2\omega(x-\alpha_{n-1})} \\
&\quad = 4(1+\beta)x^2 + 8(a - p\beta)x + 4(a^2 + q\beta) \\
&\qquad + \frac{2A}{x} + \frac{4n^2}{x^2} + \left(2B - \frac{1}{2\omega}\right)\frac{1}{x-\alpha_n} \\
&\qquad + \left(2C + \frac{1}{2\omega}\right)\frac{1}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{1}{4(x-\alpha_n)^2} + \frac{1}{4(x-\alpha_{n-1})^2}.
\end{aligned}$$

L'identité (14) donne alors les relations suivantes :

$$(18)\qquad M^2 = 1 + \beta,$$

$$(19)\qquad MN = p\beta - a,$$

$$(20)\qquad N^2 + 2nM = a^2 + q\beta,$$

$$(21)\qquad A + 4nN + n\left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) = 0,$$

puis

$$B = M\alpha_n - N + \frac{n}{\alpha_n}$$

et

$$C = -M\alpha_{n-1} + N - \frac{n}{\alpha_{n-1}}.$$

Ces deux dernières sont, comme il est facile de le voir, identiquement satisfaites.

Des équations (21) et (17) on déduit

$$(22)\qquad N = n\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) + \frac{B\alpha_{n-1} + C\alpha_n}{\omega} = a - \frac{P_n}{2n}.$$

On a ensuite

$$B^2 = \left(M\alpha_n - N + \frac{n}{\alpha_n}\right)^2 :$$

d'où, en développant le carré et en remplaçant M^2, MN, N^2 et N par leurs valeurs tirées des relations (18), (19), (20) et (22),

$$(23)\qquad B^2 + 2\frac{2nB\alpha_{n-1}}{\alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n-1})} + \frac{2nC}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - (\alpha_n + a)^2 + n^2\left(\frac{1}{\alpha_n^2} + \frac{2}{\alpha_n\alpha_{n-1}}\right) = 0.$$

On a de même

$$C^2 = \left(-M\alpha_{n-1} + N - \frac{n}{\alpha_{n-1}}\right)^2,$$

d'où, en développant et en remplaçant M^2, MN, N^2 et N par leurs valeurs tirées des relations (18), (19), (20) et (22),

$$(24)\qquad C^2 + \frac{2nC\alpha_n}{\alpha_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-1})} + \frac{2nB}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} - (\alpha_{n-1} + a)^2 + n^2\left(\frac{1}{\alpha_{n-1}^2} + \frac{2}{\alpha_n\alpha_{n-1}}\right) = 0.$$

10. La solution complète du problème est maintenant ramenée à une question d'Algèbre élémentaire.

Si en effet, entre les équations (23) et (24), on élimine successivement C et B, on obtiendra deux équations du quatrième degré auxquelles satisfont respectivement ces deux quantités, et qui sont de la forme

$$\Phi(B, \alpha_n, \alpha_{n-1}, n) = 0 \tag{25}$$

et

$$\Phi_1(C, \alpha_n, \alpha_{n-1}, n) = 0. \tag{26}$$

Si maintenant on observe que B se déduit de C par le changement de n en $(n+1)$, de l'équation (26) on déduira une nouvelle équation

$$\Phi_1(B, \alpha_{n+1}, \alpha_n, n+1) = 0. \tag{27}$$

Ces deux équations (25) et (27), auxquelles satisfait B, sont d'ailleurs distinctes, puisqu'elles ne renferment pas les mêmes lettres; en écrivant la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles aient une racine commune, on obtiendra la relation qui lie ensemble trois quantités consécutives

$$\alpha_{n+1}, \ \alpha_n \ \text{et} \ \alpha_{n-1},$$

et cette relation permettra d'obtenir ces diverses quantités par voie récurrente.

La valeur de la racine commune donnera B, et par conséquent Q_n; enfin, la valeur de C se déduisant de celle de B par le changement de n en $n-1$, la formule (22) donnera la valeur de P_n.

Essai d'une démonstration d'un théorème de Géométrie, rédigé sur l'invitation de M. Charles Hermite;

PAR M. H.-A. SCHWARZ.

Essai d'une démonstration du théorème :

Les coordonnées d'une courbe plane du degré n qui a précisément

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-2$$

points doubles différents s'expriment rationnellement par un paramètre et par une racine carrée d'une fonction entière du cinquième ou du sixième degré de ce paramètre.

Prenons une courbe plane C_n irréductible, dont

$$F(x, y) = 0$$

soit l'équation, qui ait précisément $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-2$ points doubles différents.

Premièrement, il sera toujours possible de faire passer par les points doubles et en outre par un point P_0 de la courbe C_n pris arbitrairement une courbe C_{n-3} du degré $n-3$, car le nombre proposé de points

$$\frac{n^2-3n-2}{2}+1$$

n'est pas plus grand que $\frac{(n-3)n}{2}$.

La courbe C_{n-3} rencontre la courbe C_n aux points doubles et en outre aux deux points P_0 et P'_0.

Prenons sur C_n un point différent des points doubles et des deux points P_0, P'_0, et faisons passer par ce point nouveau et par les points doubles de C_n une courbe C'_{n-3} du degré $n-3$. Cette courbe sera différente de la courbe C_{n-3}. Soient $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ les équations des courbes C_{n-3}, C'_{n-3};

$$\varphi_1 - \lambda\varphi_2 = 0$$

sera l'équation d'un faisceau de courbes du degré $n-3$ passant par les points doubles de la courbe C_n et dont chacune a en commun deux points avec C_n. Donc, *à chaque valeur de la variable* λ *correspondront deux points de* C_n, *ou chacun des points de la courbe* C_n *est* conjugué *à un autre et cet autre est conjugué réciproquement au premier.*

Il est nécessaire que les *deux* points d'intersection de la courbe $\varphi_1 - \lambda\varphi_2 = 0$ avec la courbe $F(x, y) = 0$ soient variables avec λ; si l'un d'eux seulement était variable avec λ, l'autre constant, la courbe C_n ou $F(x, y) = 0$ serait une de celles-ci, dont les coordonnées peuvent être exprimées rationnellement par le paramètre λ, et le nombre des points doubles serait $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Prenons *en second lieu* sur la courbe C_n, arbitrairement, n points qui soient différents des points doubles et dont aucun ne soit *conjugué* à un autre de ces n points.

Soit le point P_0 un de ces points, et désignons les autres par P_1, P_2, ..., P_{n-1}.

Faisons passer par les points doubles et par les points P_0, ..., P_{n-1} une courbe C_{n-2} du degré $n-2$, ce qui est toujours possible; cette courbe rencontrera la courbe C_n en outre aux *deux* points P_n et P_{n+1}.

Choisissons les points doubles et les points P_3, P_4, ..., P_n, P_{n+1} pour les points fondamentaux d'un faisceau de courbes du degré $n-2$. Une de ces courbes est C_{n-2}; C'_{n-2} en est une autre. Soient $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ les équations des courbes C_{n-2} et C'_{n-2}:

$$\psi_1 - \mu\psi_2 = 0$$

sera l'équation du faisceau de courbes du degré $n-2$, dont chacune a *trois* points en commun avec C_n outre les points fondamentaux, et ces points sont tous les trois variables avec le paramètre μ.

Pour éviter la possibilité que le point P_0 fût commun aux courbes C_{n-2} et C'_{n-2}, on pourrait changer la signification des points P_0, P_1, P_2; si l'on a déterminé la courbe C'_{n-2} par un point différent des points P_0, P_1, P_2, la courbe C'_{n-2}, outre les points fondamentaux, ne peut avoir que *deux* de ces trois points en commun avec la courbe C_{n-2}, et l'on pourrait choisir le troisième pour le point P_0; puis on pourrait déterminer de nouveau la courbe C_{n-3}, $\varphi_1 = 0, \ldots$.

Mais on peut démontrer *a posteriori* que cette possibilité n'a pas lieu, car, dans ce cas, chacune des courbes du faisceau $\psi_1 - \mu\psi_2 = 0$ rencontrerait la courbe C_n seulement dans *un* point variable, les coordonnées s'exprimeraient rationnellement par μ et le nombre des points doubles serait $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Parmi les trois points variables qui sont communs à une courbe du faisceau $\psi_1 - \mu\psi_2 = 0$ et à la courbe C_n, on ne trouve pas, en général, une paire de points conjugués, car, si l'on pose $\lambda = 0$, $\mu = 0$, les trois points sont P_0, P_1, P_2, dont aucun n'est, par hypothèse, conjugué à quelqu'un des deux autres.

On peut donc conclure : *A chaque point de C_n, excepté les points doubles et les points fondamentaux, correspond : 1° une seule valeur de λ; 2° une seule valeur de μ.*

A chaque valeur du paramètre λ correspondent DEUX *points de C_n, et par conséquent* DEUX *valeurs du paramètre μ; à chaque valeur du paramètre μ correspondent* TROIS *points de C_n, et par conséquent* TROIS *valeurs du paramètre λ.*

Cette correspondance est définie par une équation algébrique entre les variables λ et μ, qui est du deuxième degré pour μ et du troisième degré pour λ :

$$G(\lambda, \mu) = \chi_1\mu^2 + 2\chi_2\mu + \chi_3 = 0,$$

où χ_1, χ_2, χ_3 sont des fonctions entières du paramètre λ du troisième degré.

Outre les solutions qui correspondent aux points doubles et qui ne dépendent pas des valeurs des paramètres λ et μ, les équations

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \lambda\varphi_2 &= 0, \\ \psi_1 - \mu\psi_2 &= 0, \\ F(x, y) &= 0, \\ G(\lambda, \mu) &= 0, \end{aligned}$$

ont, en général, *une seule solution* (x, y) en commun, car, si l'on pose $\lambda = 0$, $\mu = 0$, le point P_0 est le seul point qui soit commun aux courbes $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$, $F = 0$, outre les points doubles.

Par cette raison, d'après un théorème connu, les coordonnées x, y du seul point variable qui soit commun aux courbes

$$F(x, y) = 0, \quad \varphi_1 - \lambda\varphi_2 = 0, \quad \psi_1 - \mu\psi_2 = 0,$$

où les variables λ, μ sont liées entre elles par l'équation $G(\lambda, \mu) = 0$, s'expriment rationnellement par les paramètres λ et μ, c'est-à-dire par λ et la racine carrée $\sqrt{\chi_2^2 - \chi_1\chi_3}$ d'une fonction entière du cinquième ou du sixième degré, ce qu'il fallait démontrer.

Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite;

Par M. H. RESAL [1].

1. Déterminer la forme d'une courbe telle que, si elle roule sur une droite, un point relativement fixe de son plan décrive une courbe donnée, tel est le problème que je me propose de résoudre.

J'ai déjà traité cette question, dans un cas particulier, dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 2 juillet 1877 et ayant pour titre : *Sur la génération de la courbe méridienne d'une surface de révolution dont la courbure moyenne varie suivant une loi donnée.*

Je croyais avoir la priorité dans la manière de poser la question en me plaçant à un point de vue général; mais, après avoir terminé mon travail, j'ai trouvé dans le Tome VI, 1re série, de ce journal (1841, p. 319) une Note de Sturm, où l'auteur dit notamment : « On peut, en général, déterminer la courbe qu'il faut faire rouler sur une droite pour qu'un certain point de cette courbe mobile décrive une autre courbe donnée par son équation différentielle. » Sturm n'est pas allé plus loin, mais il n'en a pas moins la priorité.

Quoi qu'il en soit, je crois que la méthode semi-géométrique et semi-analytique que je vais exposer, et qui me conduit à quelques applications curieuses, dont il serait facile d'augmenter le nombre, n'est pas sans présenter quelque intérêt.

---

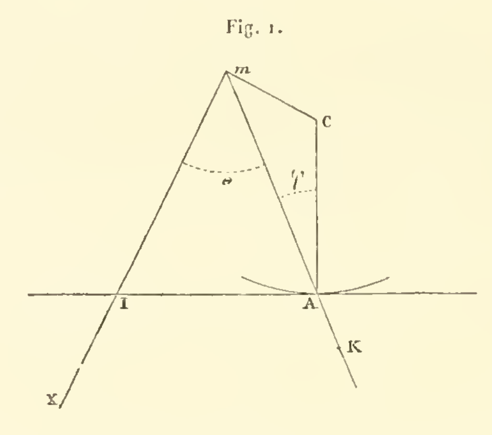
[1] J'avais complètement perdu de vue cette Note, qui remonte à 1877 et qui est le résumé d'une conférence faite aux élèves de l'École Polytechnique en 1878.

2. Le rayon de courbure d'une courbe dont l'équation est donnée ne dépendant évidemment que d'une seule variable, on peut concevoir, lors même que cette équation serait une équation différentielle d'un ordre plus ou moins élevé, que l'on puisse prendre pour la variable la portion de la normale à la courbe limitée par une droite fixe. C'est cette droite que nous prendrons pour directrice du roulement de la courbe mobile.

3. Soient (*fig.* 1)

A le point de contact de la courbe cherchée avec la droite directrice;
C son centre de courbure;
$\rho =$ AC son rayon de courbure;
m le point de son plan qui doit décrire la courbe donnée;

Fig. 1.



R $= m$K le rayon de courbure de cette dernière courbe;
$r = m$A sa normale;
φ l'angle qu'elle forme avec AC;
$m\,x$ une droite de direction fixe dans le plan de la courbe mobile menée par le point m;
I son intersection avec la directrice du mouvement.

Nous considérerons comme constante la vitesse angulaire instantanée ω de la courbe mobile autour du point A.

Le centre des accélérations du plan de cette courbe coïncide avec le centre de courbure C [1].

L'accélération normale $\frac{\omega^2 r^2}{R}$ du point m, dirigée de m vers K, étant égale à la composante, suivant sa direction, de $\omega^2\,Cm$, on a la relation

$$\frac{\omega^2 r^2}{R} = \omega^2(r - \rho\cos\varphi),$$

d'où

(1) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{\rho\cos\varphi}{r^2};$$

or on a

$$\widehat{AIx} = \theta + 90^\circ - \varphi,$$

d'où, pour l'angle de contingence de la courbe roulante,

$$d(\theta - \varphi)$$

et, en désignant par ds l'élément d'arc de cette courbe,

$$\rho = \frac{ds}{d(\theta - \varphi)}.$$

Si l'on remarque que $ds\cos\varphi = r\,d\theta$, l'équation (1) devient

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{d\theta}{r\,d(\theta - \varphi)},$$

d'où

(2) $$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r}{r - R}.$$

---

[1] En effet, si l'on désigne par u la vitesse du centre instantané A, la distance du centre des accélérations, qui est situé sur la direction de AC, à A est égale, comme on le sait, à $\frac{u}{\omega}$; mais, si $d\alpha$ désigne l'angle de contingence et ds l'élément d'arc de la courbe mobile, on a

$$u = \frac{ds}{dt}, \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

d'où

$$\frac{u}{\omega} = a\frac{ds}{d\alpha} = \rho,$$

ce qu'il fallait établir.

4. Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que l'équation (2) permet de résoudre facilement le problème proposé dans le cas où $r = m\text{R}$ [1], m étant un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif; on a, en effet,

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1}{m-1},$$

d'où, en choisissant la direction de Ox de manière que φ soit nul avec θ,

(3) $$\varphi = -\frac{\theta}{m-1}.$$

---

[1] Prenons pour axe des x la droite à laquelle est limitée la normale r, et appelons α l'angle que forme la tangente à la courbe avec l'axe des x et ds l'élément d'arc. Nous avons, en admettant, pour fixer les idées, que la courbe tourne sa concavité vers l'axe des x,

$$\frac{1}{\text{R}} = -\frac{d\alpha}{ds}, \quad y = -r\cos\alpha, \quad dy = -ds\sin\alpha,$$

et la relation $\text{R} = mr$ devient

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos\alpha}{my}$$

ou

$$\sin\alpha\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{\cos\alpha}{my}.$$

On tire de là

(a) $$y = y_0\cos^m\alpha,$$

y_0 étant la valeur de y correspondant à $\alpha = 0$.

Si l'on remarque que

$$dx = -dy\tan g\alpha,$$

l'équation (a) donne

(b) $$x = my_0\int(\cos^{m-2}\alpha - \cos^m\alpha)\,dx.$$

L'intégration ne pourra s'effectuer que dans les conditions connues, en dehors desquelles il pourra être avantageux d'avoir recours au roulement d'une courbe auxiliaire pour tracer celle que l'on veut obtenir.

Il n'est pas besoin de faire remarquer que, en supposant $m = -1$, les équations (a) et (b), par l'élimination de α, conduisent très rapidement à celle de la chaînette.

On déduit de là

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = \operatorname{tang}\varphi = -\operatorname{tang}\frac{\theta}{m-1},$$

puis, en désignant par r_0 la valeur de r correspondant à $\theta = 0$,

$$(4) \qquad r = r_0 \cos^{m-1}\frac{\theta}{m-1}.$$

L'hypothèse de $m = 1$ est inadmissible d'après l'équation (4), ce qui était visible *a priori*.

Pour $m = 2$, on a

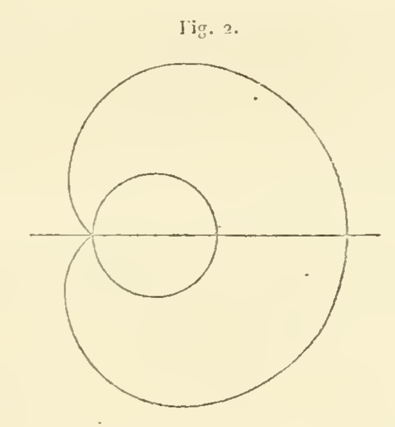
$$r = r_0 \cos\theta,$$

équation d'une circonférence d'un diamètre égal à r_0 rapportée à l'un des points de la courbe, ce qui devait être, puisque la relation $R = 2r$ caractérise la cycloïde.

Si $m = 3$, l'équation (4) donne

$$r = \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2}\cos\theta,$$

Fig. 2.



ce qui représente une courbe que l'on tracera facilement (*fig.* 2) en décrivant d'abord un cercle d'un diamètre égal à $\frac{r_0}{2}$ et augmentant de cette longueur les rayons vecteurs partant d'un même point de sa circonférence.

Pour $m = -1$, on a

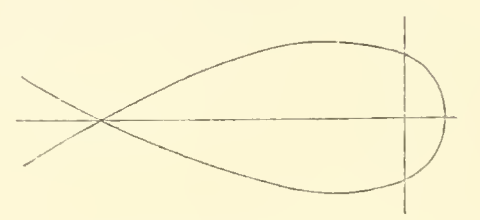
$$r = \frac{2r_0}{1 + \cos\theta},$$

équation d'une parabole rapportée à son axe et à son foyer; la courbe est ainsi une chaînette, comme on devait le prévoir, puisque cette courbe est caractérisée par la relation $r = -R$.

Pour $m = -2$, on a

$$r = \frac{r_0}{\cos^3 \frac{\theta}{3}},$$

Fig. 3.



équation qui représente une sorte de folium (*fig.* 3) dont la tangente forme avec le rayon vecteur un angle égal à $90^\circ + \frac{\theta}{3}$.

Nous ne pensons pas qu'il soit intéressant de pousser plus loin les applications de la formule (4).

5. Proposons-nous maintenant d'intégrer l'équation (2) en supposant, conformément à ce que nous avons dit dès le début, que R soit une fonction donnée de r. Nous avons

$$\frac{d\varphi}{ds} = r\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{rd\theta} = r\frac{d\varphi}{dr}\operatorname{tang}\varphi = -r\frac{d\log\cos\varphi}{dr},$$

et l'équation précitée devient

$$\frac{d\log\cos\varphi}{dr} = -\frac{1}{r - R},$$

d'où

(5) $$\cos\varphi = \sqrt{C}e^{-\int\frac{dr}{r-R}},$$

C étant une constante arbitraire positive.

On déduit de là

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dr}{rd\theta} = \sqrt{\frac{e^{2\int\frac{dr}{r-R}}}{C} - 1}$$

d'où

(6) $$\theta = \int\frac{dr}{r\sqrt{\frac{e^{2\int\frac{dr}{r-R}}}{C} - 1}}\cdot$$

6. Supposons que R soit constante ou que la courbe que l'on veut tracer soit un cercle. Il vient

(7) $$\theta = \int\frac{dr}{r\sqrt{\frac{(r-R)^2}{C} - 1}}\cdot$$

Posons, en désignant par γ une autre constante substituée à C,

$$\sqrt{C} = \gamma R,$$

puis

(8) $$\frac{1}{\gamma R}(r - R) = u,$$

d'où

(9) $$r = R(1 + \gamma u).$$

L'équation (7) devient

(10) $$\theta = \gamma\int\frac{du}{(1+\gamma u)\sqrt{u^2 - 1}}\cdot$$

Pour effectuer l'intégration, posons encore

$$u^2 - 1 = (u - z)^2,$$

d'où

$$(11)\qquad u = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

et

$$du = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)dz.$$

L'équation (10) devient

$$(12)\qquad \theta = -2\gamma \int \frac{dz}{2z + \gamma(z^2+1)}.$$

Nous avons maintenant trois cas à distinguer:

1° $\gamma^2 < 1$. L'équation ci-dessus donne

$$\theta = -2\int \frac{dz}{\left(z + \frac{1-\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\right)\left(z + \frac{1+\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\right)}$$

$$= -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int \frac{dz}{z + \frac{1-\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}} - \int \frac{dz}{z + \frac{1+\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}},$$

d'où, en désignant par A une nouvelle constante arbitraire,

$$(13)\qquad \frac{z + \frac{1}{\gamma} + a}{z + \frac{1}{\gamma} - a} = A e^{\frac{\theta}{a}},$$

en posant, pour abréger,

$$a = \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}.$$

De l'équation (13) on tire

$$z = -\frac{1}{\gamma} + \frac{A e^{\frac{\theta}{a}} + 1}{A e^{\frac{\theta}{a}} - 1},$$

ou, en vertu des formules (8) et (11),

$$r = R + \frac{\gamma R}{2}\left\{-\frac{1}{\gamma} + \frac{A e^{\frac{\theta}{a}} + 1}{A e^{\frac{\theta}{a}} - 1} - \frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + \frac{A e^{\frac{\theta}{a}} + 1}{A e^{\frac{\theta}{a}} - 1}}\right\},$$

équation qu'il nous paraît superflu de discuter.

2° $\gamma^2 = 1$. L'équation (12) donne, dans ce cas,

$$z = -\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\theta + \varepsilon},$$

ε étant une constante arbitraire. On déduit de là

$$r = R + \frac{\gamma R}{2}\left(-\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\theta+\varepsilon} + \frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\theta+\varepsilon}}\right).$$

3° $\gamma^2 > 1$. On a

$$z = -\frac{1}{\gamma} - \operatorname{tang}\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}(\theta + \varepsilon),$$

d'où

$$r = R - \frac{\gamma R}{2}\left[+\frac{1}{\gamma} + \operatorname{tang}\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{1}}(\theta+\varepsilon) + \frac{1}{\frac{\gamma}{1} + \operatorname{tang}\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}(\theta+\varepsilon)}\right].$$

On conviendra qu'il est plus simple d'employer le compas pour tracer une circonférence que de construire les courbes ci-dessus pour les faire rouler ensuite sur une droite.

7. Supposons maintenant que l'on veuille tracer la courbe méridienne de la surface de révolution dont la moyenne courbure est constante et égale à $\frac{1}{K}$. Nous aurons, en prenant pour droite directrice l'axe de la surface,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{K},$$

d'où

$$\frac{1}{r - R} = \frac{r - K}{r(r - 2K)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r - 2K}\right).$$

La formule (6) nous donne alors

$$\theta = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r(r-2K)}{C} - 1}} = \sqrt{C}\int \frac{dr}{r\sqrt{r(r-2K) - C}}.$$

Si l'on pose

$$z = \frac{1}{r},$$

on trouve

$$\theta = -\sqrt{C}\int \frac{dz}{\sqrt{1+\frac{K^2}{C}-\left(z\sqrt{C}+\frac{K}{\sqrt{C}}\right)^2}},$$

d'où, en désignant par ε une constante arbitraire,

$$\theta+\varepsilon = \arc\cos \frac{z\sqrt{C}+\frac{K}{\sqrt{C}}}{\sqrt{1+\frac{K^2}{C}}}$$

et

$$r = \frac{-\frac{C}{K}}{1-\sqrt{1+\frac{C}{K^2}}\cos(\theta+\varepsilon)}.$$

En choisissant convenablement la direction de l'axe mx, on peut faire en sorte que $\varepsilon = 180°$, et alors il vient

$$r = \frac{-\frac{C}{K}}{1+\sqrt{1+\frac{C}{K^2}}\cos\theta}.$$

On voit ainsi que la courbe donnée peut être décrite par le foyer d'une conique qui roule sur une droite, théorème auquel Delaunay est arrivé synthétiquement (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VI, 1re série, p. 309).

Pour que r soit positif, ce qu'exige la nature de la question, il faut que C et K soient de signes contraires. Si K est positif et C négatif, la courbe roulante est une hyperbole. Si K est négatif, la courbe roulante est une ellipse.

Enfin, si K est infini, $\frac{C}{K}$ restant fini, la courbe roulante est une para-

bole dont le foyer, comme on devait le prévoir, décrit une chaînette.

8. La courbe élastique rapportée à deux axes rectangulaires est représentée en général par l'équation

$$\frac{1}{R} = ay + bx + c,$$

a, b, c étant des constantes.

En choisissant convenablement la direction des axes et la position de l'origine, cette équation se ramène à la suivante :

$$(14) \qquad \frac{1}{R} = ay.$$

Soient α l'angle que forme la tangente au point (x, y) avec l'axe des x pris pour droite directrice, ds l'élément d'arc de la courbe donnée ; nous avons

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\alpha}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = -\sin\alpha, \quad y = -r\cos\alpha,$$

par suite

$$(15) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = -ay,$$

d'où

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = a\sin\alpha.$$

En multipliant par $d\alpha$, intégrant et désignant par m une constante, on trouve

$$(16) \qquad \frac{d\alpha^2}{ds^2} = 2a(m - \cos\alpha).$$

La constante m se déterminera par la condition que cette équation et l'équation (15), mise sous la forme

$$(15') \qquad \frac{d\alpha}{ds} = ar\cos\alpha,$$

donneront les mêmes valeurs de $\frac{d\alpha}{ds}$ pour une valeur déterminée α_0 de α correspondant à $r = r_0$, d'où

$$(17) \qquad m = \cos\alpha_0 + \frac{ar_0^2}{2}\cos^2\alpha_0.$$

Les équations (16) et (15′), qui reviennent aux suivantes,

$$\frac{1}{R^2} = 2a(m - \cos\alpha),$$

$$\frac{1}{R} = -ar\cos\alpha,$$

donnent, par l'élimination de $\cos\alpha$,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \sqrt{\frac{1}{r^2} + 2am},$$

le signe + du radical n'étant pas admissible, puisque $\frac{1}{R}$ doit s'annuler avec a.

On déduit de là

$$\frac{1}{r - R} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2amr^2}}\right).$$

On peut toujours supposer que a est positif, car autrement il suffirait de changer le sens des y positifs. On peut d'ailleurs choisir α_0 de manière que m soit positif. Soit donc

$$2am = \frac{1}{K^2};$$

nous aurons

$$\int \frac{dr}{r - R} = \log r - \int \frac{r\,dr}{r^2\sqrt{1 + \frac{r^2}{K^2}}}.$$

Si l'on pose

$$1 + \frac{r^2}{K^2} = u^2,$$

il vient

$$\int \frac{r\,dr}{r^2\sqrt{1 + \frac{r^2}{K^2}}} = \int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2}\log\frac{u - 1}{u + 1} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1 + \frac{r^2}{K^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{K^2}} + 1},$$

par suite

$$e^{2\int \frac{dr}{r - R}} = r^2\,\frac{\sqrt{1 + \frac{r^2}{K^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{K^2}} + 1} = K\left(\sqrt{1 + \frac{r^2}{K^2}} - 1\right)^2.$$

L'équation (6) nous donne alors

$$\vartheta = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{K^2}{C}\left(\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}-1\right)^2-1}},$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme plus simple,

(16) $$\vartheta = \frac{1}{2}\int \frac{dr^2}{r^2\sqrt{h^2\left(\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}-1\right)^2-1}},$$

en remplaçant par h^2 le coefficient arbitraire $\frac{K^2}{C}$, qui doit être essentiellement positif.

Si, en désignant par v une nouvelle variable auxiliaire, nous posons

$$\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}-1 = v,$$

d'où

$$r^2 = (v^2+2v)K^2,$$

la formule (16) devient

$$\vartheta = \int \frac{(v+1)\,dv}{v(v+2)\sqrt{h^2v^2-1}} = \int \frac{v\,dv}{v^2\sqrt{h^2v^2-1}} - \int \frac{dv}{v(v+2)\sqrt{h^2v^2-1}},$$

expression que l'on sait intégrer, mais qui conduit à un résultat trop compliqué pour qu'il nous paraisse utile de l'écrire.

9. Supposons maintenant que la courbe donnée soit la méridienne de la surface capillaire de révolution. Nous prendrons pour droite directrice la perpendiculaire en un point quelconque de l'axe comprise dans le plan de la section considérée.

L'équation de la courbe dont il s'agit peut se mettre sous la forme suivante,

(17) $$\frac{1}{R}+\frac{1}{r} = 3ay+2b,$$

a et b étant des constantes.

Nous avons, en conservant les notations du numéro précédent,

$$dy = -\,ds\sin\alpha,\quad \frac{1}{R} = -\frac{d\alpha}{ds} = \sin\alpha\frac{d\alpha}{dy},$$

par suite

$$y \sin\alpha\, d\alpha - \cos\alpha\, dy = (3ay^2 + 2by)\, dy,$$

d'où, en désignant par m une constante arbitraire,

$$-y\cos\alpha = ay^3 + by^2 + m$$

ou encore

$$(18) \qquad r\cos^2\alpha = -ar^3\cos^3\alpha + br^2\cos^2\alpha + m.$$

L'équation (17), mise sous la forme

$$(19) \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = -3ar\cos\alpha + 2b,$$

et l'équation (18), par l'élimination de $\cos\alpha$, conduiront à une équation du troisième degré en $\frac{1}{R}$. On voit ainsi que, en général, θ dépendra d'une transcendante très complexe.

Nous nous bornerons à considérer la branche de la famille des courbes en question, pour laquelle m est nul.

L'équation (18) donne alors

$$-ar\cos\alpha = \frac{1}{r} + b,$$

et l'équation (19)

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{r} - b.$$

On a, par suite,

$$\frac{1}{r - R} = \frac{2 - br}{(1 - br)r} = \frac{2}{r} + \frac{b}{1 - br},$$

$$e^{2\int\frac{dr}{r-R}} = \frac{r^4}{(1 - br)^2},$$

et l'équation (6) devient

$$\theta = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^4}{C(1 - br)^2} - 1}}.$$

L'intégration ne pourra s'effectuer que dans certains cas particuliers, notamment lorsque l'on aura $b = 0$, ce qui n'est pas étonnant puisque alors on aura $R = \frac{r}{2}$, cas qui a été étudié plus haut.

Sur la théorie des nombres complexes
[SUITE];

PAR M. G. ZOLOTAREFF.

---

21. Maintenant nous allons considérer les nombres complexes qui dépendent des racines de l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^n - 1}{x - 1} = 0,$$

où n est un nombre premier impair.

Nous allons voir que les théorèmes de M. Kummer concernant ces nombres se déduisent très facilement de la théorie générale des nombres complexes exposée plus haut.

Soit α une racine de l'équation (1). Toutes les racines de cette équation sont alors

$$(2) \qquad \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots,\ \alpha^{n-1}.$$

Soit encore p un nombre premier impair. Supposons d'abord $p = n$. La fonction $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ est congrue à $(x - 1)^{n-1}$, suivant ce module.

Le nombre n est effectivement une puissance $(n-1)^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe. Nous avons

$$n = (1-\alpha)(1-\alpha^2)\ldots(1-\alpha^{n-1}) = (1-\alpha)^{n-1}\,\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha}\,\frac{1-\alpha^3}{1-\alpha}\cdots\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha},$$

et le produit $\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha}\,\frac{1-\alpha^3}{1-\alpha}\cdots\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}$ est une unité complexe, comme il est facile de le voir.

Supposons maintenant que p ne soit pas égal à n et qu'il appartienne à l'exposant h suivant le module n, en sorte que

$$p^h \equiv 1 \pmod{n}.$$

Désignant le nombre $\frac{n-1}{h}$ par k et une racine primitive quelconque de n par g, toutes les racines (2) se laissent distribuer en périodes :

$$\begin{aligned}
\beta\ \ &= \alpha \ \ + \alpha^{g^k} \ \ + \alpha^{g^{2k}} \ \ + \ldots + \alpha^{g^{(h-1)k}},\\
\beta_1\ &= \alpha^{g} \ + \alpha^{g^{k+1}} + \alpha^{g^{2k+1}} + \ldots + \alpha^{g^{(h-1)k+1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\beta_{k-1} &= \alpha^{g^{k-1}} + \alpha^{g^{2k-1}} + \alpha^{g^{3k-1}} + \ldots + \alpha^{g^{hk-1}}.
\end{aligned}$$

En vertu des liaisons connues entre les périodes, toute fonction rationnelle et entière à coefficients entiers des périodes peut être représentée sous la forme

$$a_0\beta + a_1\beta_1 + \ldots + a_{k-1}\beta_{k-1},$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ étant des nombres entiers.

Cette fonction peut être considérée comme fonction d'une seule période β, et, par conséquent, on la désigne par $F(\beta)$.

Nous avons démontré que la fonction $\frac{x^n-1}{x-1}$ suivant le module p a la forme

$$\frac{x^n-1}{x-1} = PP_1\ldots P_{k-1} + p\,\psi(x), \tag{3}$$

$P, P_1, \ldots, P_{k-1}$ étant des fonctions irréductibles suivant le module p du degré h, et $\psi(x)$ un polynôme à coefficients entiers.

Nous avons vu encore que, en remplaçant dans les expressions des périodes α par x, les périodes obtenues $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$ seront congrues suivant le module p et suivant chacune des fonctions $P, P_1, \ldots, P_{k-1}$ à des nombres constants.

Supposons que, suivant le module p et la fonction P, ces périodes soient congrues aux nombres $u, u_1, \ldots, u_{k-1}$. Alors, en remplaçant la fonction P par une autre de la suite $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$, les nombres $u, u_1, \ldots, u_{k-1}$ seront permutés cycliquement, en sorte que les périodes seront congrues respectivement à $u_r, u_{r+1}, \ldots, u_{r+k-1}$, où l'on suppose $u_{\lambda+sk} = u_\lambda$.

Nous désignerons par $F(u)$ et $F(u_r)$ les valeurs des fonctions

$$F(\eta) = a_0\eta + a_1\eta_1 + \ldots + a_{k-1}\eta_{k-1},$$
$$F(\eta_r) = a_0\eta_r + a_1\eta_{r+1} + \ldots + a_{r-1}\eta_{r+k-1}$$

quand $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$ seront remplacés respectivement par $u, u_1, \ldots, u_{k-1}$.

On voit, d'après l'équation (3), que le nombre p contient k facteurs idéaux appartenant respectivement aux fonctions $P, P_1, \ldots, P_{k-1}$.

Faisons voir maintenant comment on peut reconnaître si un nombre complexe quelconque $\varphi(\alpha)$ contient le facteur idéal appartenant à la fonction P.

Il est connu que α est une racine de l'équation

$$\alpha^h + A_1\alpha^{h-1} + A_2\alpha^{h-2} + \ldots = 0,$$

où $A_1, A_2, \ldots$ sont des fonctions des périodes $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$; par conséquent, tout nombre complexe $\varphi(\alpha)$ peut être représenté sous la forme

$$\varphi(\alpha) = \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta)\alpha + \varphi_3(\beta)\alpha^2 + \ldots + \varphi_h(\beta)\alpha^{h-1},$$

$\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \ldots, \varphi_h(\beta)$ étant des fonctions rationnelles entières des périodes $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$.

Pour que le nombre $\varphi(\alpha)$ contienne le facteur idéal de p appartenant à la fonction P, il est nécessaire et il suffit que la fonction

$$\varphi(x) = \varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)x + \varphi_3(\eta)x^2 + \ldots + \varphi_h(\eta)x^{h-1},$$

déduite de $\varphi(\alpha)$ en remplaçant α par x, soit divisible par P suivant le module p.

En vertu des propriétés des périodes, nous pouvons remplacer η,

$\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ respectivement par les nombres entiers $u, u_1, \ldots, u_{k-1}$ et par conséquent la fonction $\varphi(x)$ par la suivante :

$$\varphi_1(u) + \varphi_2(u)x + \varphi_3(u)x^2 + \ldots + \varphi_h(u)x^{h-1}.$$

Cette dernière ne peut être divisible suivant le module p par la fonction P du degré h que dans le cas où l'on a

$$\varphi_1(u) \equiv 0,\ \varphi_2(u) \equiv 0,\ \ldots,\ \varphi_h(u) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ces congruences constituent les conditions données par M. Kummer pour que $\varphi(\alpha)$ contienne le facteur de p appartenant à la fonction P.

Il est aussi facile d'exprimer les conditions pour que le nombre complexe $\varphi(\alpha)$ contienne ce facteur λ fois.

En vertu de ce que nous avons dit au n° 7, dans ce cas aura lieu la congruence

$$(3) \qquad \varphi(x)\,\mathrm{P}(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_{k-1})^{\lambda+1} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } p^{\lambda+1}, \frac{x^n-1}{x-1}\right),$$

et cette autre,

$$(4) \qquad \varphi(x)\,\mathrm{P}(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_{k-1})^{\lambda+2} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } p^{\lambda+2}, \frac{x^n-1}{x-1}\right),$$

ne sera pas satisfaite.

Or on a

$$\frac{x^n-1}{x-1} = \mathrm{P}\,\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_{k-1} + p\,\psi(x),$$

où $\psi(x)$ peut être regardé comme non divisible par aucune des fonctions $\mathrm{P}, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{k-1}$; par conséquent, on peut représenter les congruences (3) et (4) sous la forme

$$-\psi(x)\varphi(x)(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_{k-1})^{\lambda} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } p^{\lambda}, \frac{x^n-1}{x-1}\right),$$

$$-\psi(x)\varphi(x)(\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\ldots\mathrm{P}_{k-1})^{\lambda+1} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } p^{\lambda+1}, \frac{x^n-1}{x-1}\right).$$

En remarquant que $\psi(x)$ n'est divisible par aucune des fonctions P,

$P_1, \ldots, P_{k-1}$, on peut remplacer ces congruences par les suivantes :

$$\text{(I)} \qquad \varphi(x)W^\lambda \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } p^\lambda, \frac{x^n-1}{x-1}\right),$$

$$\text{(II)} \qquad \varphi(x)W^{\lambda+1} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } p^{\lambda+1}, \frac{x^n-1}{x-1}\right),$$

où $W = P_1 P_2 \ldots P_{k-1}$.

Ainsi, pour que le nombre complexe $\varphi(\alpha)$ contienne λ fois le facteur de p qui appartient à la fonction P, il est nécessaire et il suffit que la congruence (I) ait lieu et que la congruence (II) ne soit pas satisfaite. Il est facile de transformer ces conditions dans celles de M. Kummer. Nous allons chercher pour cela une fonction des périodes $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ qui ne contient qu'un facteur idéal de p appartenant, par exemple, à la fonction P et seulement une fois.

Dans le n° **20**, nous avons obtenu une congruence suivant le module p et la fonction P, à laquelle satisfont les fonctions x, x^{g^k}, $x^{g^{2k}}$, $\ldots$, $x^{g^{(h-1)k}}$. Cette congruence est de la forme

$$x^h + l_1 x^{h-1} + \ldots + l_h \equiv 0 \quad (\text{mod. } p, \text{P}),$$

$l_1, l_2, \ldots, l_h$ étant des entiers. Comme P est une fonction irréductible suivant le module p du degré h, on aura

$$\text{P} \equiv x^h + l_1 x^{h-1} + \ldots + l_h \quad (\text{mod. } p).$$

Il suit de là qu'en remplaçant, dans P, x successivement par x^{g^k}, $x^{g^{2k}}$, $\ldots$, $x^{g^{(h-1)k}}$, on obtiendra des fonctions divisibles par P suivant le module p. Il est évident que la même circonstance aura lieu relativement aux autres fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$.

Soient maintenant A et B deux fonctions entières à coefficients entiers qui satisfont à la congruence

$$(5) \qquad \text{AP} - \text{BW} \equiv x + x^g + x^{g^2} + \ldots + x^{g^{k-1}} \quad (\text{mod. } p),$$

où, comme précédemment, $W = P_1 P_2 \ldots P_{k-1}$.

Comme P et W n'ont point de facteurs communs suivant le module p, on trouvera toujours des fonctions A et B qui satisferont à la

congruence (5). Cette dernière équivaut à l'équation

$$AP - BW = x + x^{g} + x^{g^2} + \ldots + x^{g^{k-1}} + pf(x),$$

$f(x)$ étant un polynôme à coefficients entiers.

Remplaçons dans cette équation x successivement par $x^{g^k}, x^{g^{2k}}, \ldots, x^{g^{(h-1)k}}$, et désignons par

$$\begin{array}{l} A', \; A'', \; \ldots, \; A^{(h-1)}, \\ B', \; B'', \; \ldots, \; B^{(h-1)}, \\ P', \; P'', \; \ldots, \; P^{(h-1)}, \\ W', \; W'', \; \ldots, \; W^{(h-1)} \end{array}$$

les valeurs des fonctions A, B, P, W qui correspondent à ces remplacements; nous aurons les équations

$$\begin{gathered} A'P' - B'W' = x^{g^k} + x^{g^{k+1}} + x^{g^{k+2}} + \ldots + x^{g^{2k-1}} + pf(x^{g^k}), \\ A''P'' - B''W'' = x^{g^{2k}} + x^{g^{2k+1}} + \ldots + x^{g^{3k-1}} + pf(x^{g^{2k}}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

En faisant donc

$$\begin{gathered} F(\eta) = AP + A'P' + A''P'' + \ldots + A^{(h-1)}P^{(h-1)}, \\ F_1(\eta) = BW + B'W' + B''W'' + \ldots + B^{(h-1)}W^{(h-1)}, \end{gathered}$$

où les seconds termes de ces équations sont évidemment des fonctions des périodes $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$, il suit des équations précédentes

$$F(\eta) - F_1(\eta) \equiv -1 \quad \left(\text{mod. } p, \frac{x^n - 1}{x - 1}\right). \tag{6}$$

Nous avons vu que $P', P'', \ldots$ sont divisibles par P suivant le module p; de même $W', W'', \ldots$ sont divisibles par W suivant ce module; par suite, les fonctions $F(\eta)$ et $F_1(\eta)$ sont divisibles respectivement par P et W suivant le module p.

On voit par la congruence (6) que $F(\eta)$ n'est divisible suivant le module p par aucune des fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$. Par conséquent, le nombre complexe $F(\beta)$ contient seulement le facteur idéal de p

appartenant à la fonction P. Si ce facteur est contenu dans $F(\beta)$ plusieurs fois, nous allons prendre le nombre complexe $F(\beta)+p$. Il est évident que ce nombre ne contient de tous les facteurs idéaux de p que celui qui appartient à la fonction P; de plus, comme p contient ce facteur au premier degré et $F(\beta)$ à un degré supérieur, la somme $F(\beta)+p$ contiendra le même facteur une seule fois. Cela se vérifie au moyen des congruences (I), (II).

Ainsi, on trouvera toujours un nombre complexe $\Phi(\beta)$ qui contiendra un seul facteur idéal de p, ou, ce qui est la même chose, on trouvera une fonction des périodes $\Phi(\eta)$, qui, suivant le module p, est représentée sous la forme

$$\Phi(\eta) \equiv P\varpi(x) \pmod{p},$$

$\varpi(x)$ étant un polynôme non divisible suivant ce module par aucune des fonctions $P, P_1, \ldots, P_{k-1}$.

Soit maintenant

$$\Psi(\eta) = \Phi(\eta_1)\Phi(\eta_2)\ldots\Phi(\eta_{k-1}).$$

Il suit de ce qui a été dit que $\Psi(\eta)$ suivant le module p est de la forme

$$\Psi(\eta) \equiv W\Omega(x) \pmod{p},$$

$\Omega(x)$ n'étant divisible par aucune des fonctions $P, P_1, \ldots, P_{k-1}$.

En vertu du n° 8, on peut remplacer, dans les congruences (I), (II), W par $W\Omega(x)$, et l'on aura, au lieu de ces congruences,

$$\varphi(x)[\Psi(\eta)]^{\lambda} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } p^{\lambda}, \frac{x^n-1}{x-1}\right),$$

$$\varphi(x)[\Psi(\eta)]^{\lambda+1} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } p^{\lambda+1}, \frac{x^n-1}{x-1}\right).$$

Ainsi, pour que le nombre complexe $\varphi(\alpha)$ contienne λ fois le facteur de p appartenant à la fonction P, il est nécessaire et il suffit que le nombre complexe $\varphi(\alpha)[\Psi(\beta)]^{\lambda}$ soit divisible par p^{λ} et que le nombre complexe $\varphi(\alpha)[\Psi(\beta)]^{\lambda+1}$ ne soit point divisible par $p^{\lambda+1}$. C'est dans cette forme que ces conditions sont données par M. Kummer.

Remarquons enfin qu'en appliquant au cas considéré, où les fonc-

tions $P, P_1, \ldots, P_{k-1}$ sont toutes du degré h, ce qui a été démontré au n° **11**, on aura ce théorème :

Si la norme du nombre complexe $\varphi(\alpha)$ est divisible par un nombre premier p appartenant à l'exposant h suivant le module n, elle est divisible par p^h.

22. Jusqu'ici nous avons exclu de notre recherche (n° **5**) les équations

$$(1)\qquad F(x) = X^n + a_1 X^{n-2} + a_2 X^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

telles que la fonction $F(x)$ suivant le module premier p ait la forme

$$(2)\qquad F(x) = V^m V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s} + p\varphi(x),$$

le polynôme $\varphi(x)$ étant divisible suivant ce module par l'une des fonctions V, dont l'exposant m surpasse l'unité.

Par le même numéro, on sait qu'il n'y a qu'un nombre fini de modules tels que p. Quant aux autres nombres premiers, leur décomposition en facteurs complexes qui dépendent des racines de l'équation (1) s'opère d'après les principes exposés plus haut.

Il nous reste maintenant à considérer les modules exceptionnels, suivant lesquels la fonction $F(x)$ peut être présentée sous la forme (2). D'abord nous allons établir que la propriété des nombres complexes démontrée dans le n° **12** (corollaire I), savoir, *si le rapport $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$ de deux nombres complexes entiers n'est pas un nombre entier il ne peut satisfaire à aucune équation de la forme*

$$Z^n + q_1 Z^{n-1} + \ldots + q_n = 0,$$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ étant des nombres entiers, cesse d'avoir lieu s'il y a des modules exceptionnels.

En effet, supposons dans l'équation (2), pour fixer les idées, $m > 1$ et $\varphi(x)$ divisible par V suivant le module p.

En désignant par ζ le nombre complexe

$$\frac{V^{m-1} V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s}}{p},$$

nous allons démontrer qu'il satisfait à l'équation

$$(\alpha) \qquad \zeta^N + q_1\zeta^{N-1} + q_2\zeta^{N-2} + \ldots + q_N = 0,$$

à coefficients entiers.

En effet, l'équation (2) nous donne

$$(3) \qquad V^m V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s} = -p\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$, en vertu de la supposition, est de la forme

$$\varphi(x) = AV + pB,$$

A et B étant des fonctions entières à coefficients entiers.

En multipliant les deux membres de l'équation (3) par $V^{m-2}V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s}$, on aura

$$V^{2m-2}V_1^{2m_1} \ldots V_s^{2m_s} = -pAV^{m-1}V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s} - p^2BV^{m-2}V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\zeta^2 + A\zeta + BV^{m-2}V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s} = 0.$$

En remplaçant successivement, dans les coefficients A et BV^{m-2}, $V_1^{m_1} \ldots V_s^{m_s}$ de cette équation, x par toutes les racines de l'équation (1), et en multipliant les résultats, on aura une équation de la forme (α). A cause de cette propriété des modules exceptionnels, il nous faut généraliser la notion des nombres complexes entiers.

Chaque nombre complexe

$$y = a + bx + \ldots + lx^{n-1},$$

$a, b, \ldots, l$ étant des nombres rationnels, sera nommé nombre entier s'il satisfait à l'équation de la forme (α). D'ailleurs, y étant une fonction rationnelle à coefficients entiers, le degré de l'équation peut être évidemment supposé égal à n, savoir au degré de l'équation donnée $F(x) = 0$.

Le produit $y_0 y_1 \ldots y_{n-1}$, où

$$\begin{aligned} y_0 &= a + bx_0 + \ldots + lx_0^{n-1}, \\ y_1 &= a + bx_1 + \ldots + lx_1^{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{n-1} &= a + bx_{n-1} + \ldots + lx_{n-1}^{n-1}, \end{aligned}$$

sera dit la *norme* du nombre complexe y. Ce produit est évidemment un nombre entier ordinaire, et nous le désignerons toujours par $\mathrm{N}(y)$.

Remarque. — Supposons que y soit une fonction rationnelle à coefficients entiers d'une racine de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$ et, de plus, qu'il satisfasse à l'équation

$$y^\mu + \mathrm{A}_1 y^{\mu-1} + \mathrm{A}_2 y^{\mu-2} + \ldots + \mathrm{A}_\mu = 0,$$

$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mu$ étant des nombres complexes entiers. Alors y sera un nombre entier.

En effet, soient

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}'_1, \ \mathrm{A}'_2, \ \ldots, \ \mathrm{A}'_\mu, \\ &\mathrm{A}''_1, \ \mathrm{A}''_2, \ \ldots, \ \mathrm{A}''_\mu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

les valeurs des coefficients $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_\mu$ lorsqu'on y remplace la racine de l'équation (1) par les autres racines de la même équation.

En multipliant les résultats

$$\begin{aligned} &y^\mu + \mathrm{A}_1 y^{\mu-1} + \mathrm{A}_2 y^{\mu-2} + \ldots + \mathrm{A}_\mu, \\ &y^\mu + \mathrm{A}'_1 y^{\mu-1} + \mathrm{A}'_2 y^{\mu-2} + \ldots + \mathrm{A}'_\mu, \\ &y^\mu + \mathrm{A}''_1 y^{\mu-1} + \mathrm{A}''_2 y^{\mu-2} + \ldots + \mathrm{A}''_\mu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on aura une équation de la forme

$$y^{\mu n} + s_1 y^{\mu n-1} + s_2 y^{\mu n-2} + \ldots = 0,$$

$s_1, s_2, \ldots$ étant des entiers ordinaires. Donc y est un nombre complexe entier.

25. Soit ξ un des nombres entiers complexes satisfaisant à l'équation

$$\xi^n + q_1 \xi^{n-1} + q_2 \xi^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ étant des entiers ordinaires. Il peut être présenté sous la forme

$$\xi = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{n-1}}{N},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, N étant des entiers qui n'ont pas de diviseurs communs.

Remarquons, en premier lieu, que N n'est divisible que par les modules exceptionnels.

En effet, soit p un autre nombre premier quelconque et supposons qu'il entre comme facteur dans N. Alors on en conclut, d'après le n° 15 (corollaire I), que tous les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ sont divisibles par p, ce qui est contre l'hypothèse.

En second lieu, nous ferons voir que le discriminant Δ d'une équation donnée $F(x) = 0$ est divisible par N^2.

Soit, en effet,

$$N = p^{\mu} p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots,$$

$p, p_1, p_2, \ldots$ étant des facteurs premiers et différents du nombre N.

La proposition dont il s'agit sera démontrée si l'on fait voir que le discriminant Δ est divisible par $p^{2\mu}$, par $p_1^{2\mu_1}$, ...

A cet effet, considérons le nombre complexe entier

$$\eta = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots \xi = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{n-1}}{p^{\mu}}.$$

Par hypothèse, un des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ au moins n'est pas divisible par p. Désignons par εx^{μ} un des termes de la fonction

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{n-1},$$

dont le coefficient ε n'est pas divisible par p.

De plus, soit E une racine de la congruence

$$\varepsilon E \equiv 1 \pmod{p^{\mu}}.$$

Donc

$$\varepsilon E = 1 + p^{\mu} f,$$

f étant un nombre entier.

Nous considérons encore un nombre complexe

$$\zeta(x) = E\eta - fx^{\mu} = \frac{x^{\mu} + E\alpha + E\beta x + \dots}{p^{\mu}}.$$

En premier lieu, il est aisé de voir que le déterminant

$$A = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{\mu-1} & \zeta(x_0) & x_0^{\mu+1} & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{\mu-1} & \zeta(x_1) & x_1^{\mu+1} & \dots & x_1^{n-1} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{\mu-1} & \zeta(x_{n-1}) & x_{n-1}^{\mu+1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}^2$$

est un nombre entier, car, d'une part, ce déterminant est évidemment une fonction symétrique des racines $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, et par conséquent il est égal au nombre rationnel ordinaire; d'autre part, étant une fonction rationnelle des racines des équations

$$F(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \dots = 0$$

et

$$\xi^n + q_1 \xi^{n-1} + q_2 \xi^{n-2} + \dots + q_n = 0,$$

il satisfait encore à une équation de la forme

$$A^m + h_1 A^{m-1} + h_2 A^{m-2} + \dots = 0,$$

$h_1, h_2, \dots$ étant des entiers. Il suit de là que A est un nombre entier.

En second lieu, en remplaçant $\zeta(x_0), \zeta(x_1), \dots$ par leurs valeurs, on aura

$$A = \frac{\Delta}{p^{2\mu}}.$$

Donc Δ est divisible par $p^{2\mu}$. On s'assure de la même manière que Δ est divisible par $p_1^{2\mu_1}, p_2^{2\mu_2}, \dots$.

D'où il suit que N ne surpasse pas $\sqrt{\Delta}$.

24. La notion des nombres complexes entiers étant établie, nous indiquons comment on doit concevoir leur division.

Un nombre complexe entier ξ sera dit divisible par un autre nombre α, si le quotient est encore un nombre entier.

Cela posé, nous allons démontrer une proposition qui nous sera utile dans ce qui suit.

Soient p un nombre premier ordinaire et α un nombre complexe dont la norme est divisible par p. Supposons $N(\alpha) = p^\lambda b$, b étant un entier non divisible par p.

Maintenant, s'il existe un autre nombre complexe ξ qui, étant multiplié par un nombre quelconque ordinaire H, premier avec p, devienne divisible par α, le produit $b\xi$ le sera aussi.

En effet, H étant premier avec p, on peut toujours trouver deux nombres entiers P et Q tels qu'ils satisfassent à l'équation

$$PH - p^\lambda Q = 1.$$

De ce que le nombre $H\xi$ est divisible par α il suit que le nombre $\frac{HP\xi}{\alpha} = \frac{\xi}{\alpha} + \frac{p^\lambda Q\xi}{\alpha}$ et par conséquent le nombre $\frac{b\xi}{\alpha} + \frac{p^\lambda b Q\xi}{\alpha}$ sont des nombres entiers. Mais, en désignant par $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(n-1)}$ les valeurs de α quand on y remplace x par les autres racines de l'équation (1) du n° **22**, on aura

$$\frac{p^\lambda b Q\xi}{\alpha} = \alpha' \alpha'' \ldots \alpha^{(n-1)} Q\xi.$$

Or, $\frac{p^\lambda b Q\xi}{\alpha}$ est un nombre entier : donc $\frac{b\xi}{\alpha}$ le sera

25. Passons maintenant à la classification des nombres entiers par rapport au module premier p.

Remarquons que chaque nombre complexe entier est congru suivant un module p^m, m étant un exposant quelconque, bien entendu, positif et entier, au nombre $\frac{a + bx + cx^2 + \ldots + lx^{n-1}}{p^\mu}$, l'entier μ pouvant être égal à zéro.

En effet, soit $\zeta = \frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Lx^{n-1}}{N}$ un nombre entier quel-

conque dont le dénominateur N se mettra toujours sous la forme

$$N = p^{\mu} M,$$

M n'étant pas divisible par p.

Cela posé, on pourra trouver les entiers P et Q tels qu'on ait

$$PM - Qp^{m} = 1,$$

et, par conséquent, le nombre ζ pourra être présenté sous la forme

$$\zeta = \frac{P(A + Bx + Cx^2 + \ldots + Lx^{n-1})}{p^{\mu}} - Qp^{m}\zeta.$$

Donc

$$\zeta \equiv \frac{P(A + Bx + Cx^2 + \ldots + Lx^{n-1})}{p^{\mu}} \pmod{p^{m}}.$$

Ainsi, pour faire une classification des nombres entiers suivant un module premier p, il suffit de considérer les nombres entiers

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{n-1},$$
$$\frac{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \ldots + \lambda' x^{n-1}}{p},$$
$$\frac{\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2 + \ldots + \lambda'' x^{n-1}}{p^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous avons vu plus haut que les exposants du nombre p qui figure dans les dénominateurs ne surpassent pas la limite connue (n° **25**).

Considérons d'abord les nombres complexes entiers de la forme

$$\zeta = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{n-1}}{p}.$$

On peut évidemment poser

$$\zeta = \frac{\varphi(x)}{p} + a + bx + cx^2 + \ldots + lx^{n-1},$$

a, b, c, ... étant des entiers et $\varphi(x)$ une fonction entière dans laquelle

les coefficients des diverses puissances de x sont rabaissés au-dessous de p.

De tous les nombres complexes entiers $\frac{\varphi(x)}{p}$ nous choisirons celui pour lequel $\varphi(x)$ sera du moindre degré possible. Le coefficient de la plus haute puissance de x dans $\varphi(x)$ peut toujours être supposé égal à l'unité.

En effet, soit

$$\varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Lx^\mu.$$

Si le coefficient L est différent de l'unité, on prendra un nombre g tel que l'on ait

$$gL \equiv 1 \pmod{p}.$$

Alors considérons le nombre complexe entier

$$g\frac{\varphi(x)}{p} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + x^\mu}{p} + \alpha' + \beta' x + \ldots + \lambda' x^\mu,$$

et prenons, au lieu de $\frac{\varphi(x)}{p}$, le nombre complexe

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + x^\mu}{p},$$

ayant la forme désirée.

Cela posé, nous ferons voir qu'il n'existe qu'un seul nombre complexe entier

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + x^\mu}{p}$$

pour lequel le degré μ sera le moindre possible.

En effet, soient au contraire

$$\frac{\varphi(x)}{p} = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + x^\mu}{p}$$

et

$$\frac{\varphi_1(x)}{p} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 x^2 + x^\mu}{p}$$

deux nombres entiers distincts et tels que le degré μ ait la moindre

valeur possible. Alors la différence $\frac{\varphi(x)-\varphi_1(x)}{p}$ sera encore un nombre complexe entier dont le numérateur est du degré inférieur à μ, ce qui est contre l'hypothèse. Donc il n'existe qu'un seul nombre complexe $\frac{\varphi(x)}{p}$ de la forme indiquée.

Maintenant nous ferons voir que tout nombre complexe entier de la forme

$$\frac{a+bx+cx^2+\ldots+lx^{n-1}}{p}$$

sera aussi de la forme

$$\mathrm{A}\frac{\varphi(x)}{p}+\mathrm{B},$$

A et B étant deux polynômes à coefficients entiers.

En effet, en divisant la fonction $a+bx+cx^2+\ldots+lx^{n-1}$ par $\varphi(x)$, et en désignant par A le quotient et par R le reste, on aura

$$a+bx+cx^2+\ldots+lx^{n-1}=\mathrm{A}\varphi(x)+\mathrm{R},$$

le degré de R étant inférieur à celui de $\varphi(x)$.

Le nombre complexe

$$\frac{\mathrm{R}}{p}=\frac{a+bx+cx^2+\ldots+lx^{n-1}}{p}-\mathrm{A}\frac{\varphi(x)}{p}$$

est évidemment un nombre entier; donc, en vertu de la propriété du nombre $\frac{\varphi(x)}{p}$, on en conclut que tous les coefficients de R sont divisibles par p.

Ainsi $\mathrm{R}=p\mathrm{B}$, B étant la fonction entière à coefficients entiers, et l'on aura

$$\frac{a+bx+cx^2+\ldots+lx^{n-1}}{p}=\mathrm{A}\frac{\varphi(x)}{p}+\mathrm{B}.$$

Passons maintenant aux nombres complexes entiers de la forme

$$\zeta=\frac{a+bx+cx^2+\ldots+lx^{n-1}}{p^2}.$$

On peut présenter ces nombres complexes sous la forme

$$\zeta = \frac{f(x)}{p^2} + \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{n-1},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ étant des entiers et $f(x)$ un polynôme à coefficients entiers compris entre o et p^2. La fonction $f(x)$ consiste à son tour en deux parties,

$$f(x) = f_1(x) + p f_2(x)$$

$f_1(x)$ ne contenant pas de termes divisibles par p. En divisant $f_2(x)$ par $\varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant le polynôme considéré ci-dessus, on aura

$$f_2(x) = \mathrm{A}\varphi(x) + \mathrm{B}.$$

De ce que $\frac{f_1(x)}{p} = \frac{f(x)}{p} - f_2(x)$ est un nombre entier, on en conclut que le degré de $f_1(x)$ n'est pas inférieur à celui de $\varphi(x)$.

En posant $f_1(x) + p\mathrm{B} = \varphi_1(x)$, on aura

$$\frac{f(x)}{p^2} = \frac{\varphi_1(x)}{p^2} + \mathrm{A}\frac{\varphi(x)}{p},$$

d'où l'on voit que le nombre complexe $\frac{\varphi_1(x)}{p^2}$ est un nombre entier. Il existe un nombre complexe entier, de la forme $\frac{\varphi_1(x)}{p^2}$, pour lequel $\varphi_1(x)$ sera du moindre degré possible. Le coefficient de la plus haute puissance de x dans la fonction $\varphi_1(x)$ peut être supposé égal à l'unité. En introduisant le nombre $\frac{\varphi_1(x)}{p^2}$, il est facile de faire voir que tous les nombres entiers complexes de la forme

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots + lx^{n-1}}{p^2}$$

seront aussi de la forme

$$\mathrm{A}\frac{\varphi_1(x)}{p^2} + \mathrm{B}\frac{\varphi(x)}{p} + \mathrm{C},$$

A, B, C étant des fonctions entières à coefficients entiers.

En effet, la fonction $a + bx + cx^2 + \ldots + lx^{n-1}$ n'est pas de degré inférieur à celui de $\varphi_1(x)$. En la divisant par $\varphi_1(x)$, on aura le quotient A et le reste R, de degré inférieur à celui de $\varphi_1(x)$.

D'abord il suit de l'égalité

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots + lx^{n-1}}{p^2} = A\frac{\varphi_1(x)}{p^2} + \frac{R}{p^2}$$

que $\frac{R}{p^2}$ est un nombre entier. Puis, le degré de R étant moindre que celui de $\varphi_1(x)$, on voit que tous les coefficients de R sont divisibles par p, et, par conséquent, $R = pR_1$.

Par ce qui précède, on sait que le nombre entier $\frac{R_1}{p}$ doit être de la forme $B\frac{\varphi(x)}{p} + C$. Donc

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots + lx^{n-1}}{p^2} + A\frac{\varphi(x)}{p^2} = B\frac{\varphi(x)}{p} + C.$$

En considérant de la même manière les nombres complexes entiers de la forme

$$\frac{a + bx + \ldots + lx^{n-1}}{p^3} \cdots \frac{a + bx + \ldots + lx^{n-1}}{p^m},$$

p^m étant le plus haut degré de p qui figure dans les dénominateurs de nombres entiers complexes, nous choisirons parmi eux les nombres $\frac{\varphi_2(x)}{p^3}, \ldots, \frac{\varphi_{m-1}(x)}{p^m}$, semblables à $\frac{\varphi(x)}{p}$ et $\frac{\varphi_1(x)}{p^2}$.

Le coefficient de la plus haute puissance de x dans chacune des fonctions $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)$ peut être supposé égal à l'unité.

Soient respectivement $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}$ les degrés des fonctions $\varphi(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)$. On aura

$$\mu \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_{m-1}.$$

En effet, si l'on a, par exemple,

$$\mu_i > \mu_{i+1},$$

il en résultera une contradiction, car, le nombre $\frac{\varphi_{i+1}(x)}{p^{i+1}}$ étant entier, $\frac{\varphi_{i+1}(x)}{p^i}$ le sera aussi, et la fonction $\varphi_{i+1}(x)$ est de degré inférieur à celui de $\varphi_i(x)$, ce qui est en contradiction avec la définition de la fonction $\varphi_i(x)$.

De plus, si l'on a

$$\mu_i = \mu_{i+1},$$

on peut toujours faire $\varphi_i(x) = \varphi_{i+1}(x)$, car $\frac{\varphi_{i+1}(x)}{p^i}$ est un nombre entier, et $\varphi_{i+1}(x)$ est du même degré que $\varphi_i(x)$.

Posons, en général,

$$\begin{aligned}
&\mu \;\;= \mu_1 \;\;= \ldots = \mu_k,\\
&\mu_{k+1} = \mu_{k+2} = \ldots = \mu_{k_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mu_{k_h+1} = \mu_{k_h+2} = \ldots = \mu_{m-1}.
\end{aligned}$$

Alors, en suivant la même marche que plus haut, il est aisé de faire voir que tout nombre complexe entier ζ est congru suivant le module p au nombre

$$(1) \qquad \mathrm{A}\frac{\varphi_{m-1}(x)}{p^m} + \mathrm{B}\frac{\varphi_{k_h}(x)}{p^{k_h+1}} + \mathrm{C}\frac{\varphi_{k_{h-1}}(x)}{p^{k_{h-1}+1}} + \ldots + \mathrm{K}\frac{\varphi_k(x)}{p^{k+1}} + \mathrm{L},$$

A, B, C, ..., L étant des fonctions entières à coefficients entiers.

Les degrés de A, B, ..., K, L seront respectivement

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A} \text{ du degré } n - 1 - \mu_{m-1},\\
&\mathrm{B} \quad \text{»} \quad \mu_{m-1} - \mu_{k_h} - 1,\\
&\mathrm{C} \quad \text{»} \quad \mu_{k_h} - \mu_{k_{h-1}} - 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathrm{L} \text{ du degré } \mu_k - 1.
\end{aligned}$$

Réciproquement, tout nombre complexe ayant la forme (1) est évidemment un nombre entier.

Remarquons maintenant que, lorsque les deux nombres complexes

$$A\frac{\varphi_{m-1}(x)}{p^m}+B\frac{\varphi_{k_h}(x)}{p^{k_h+1}}+C\frac{\varphi_{k_{h-1}}(x)}{p^{k_{h-1}+1}}+\ldots,$$
$$A'\frac{\varphi_{m-1}(x)}{p^m}+B'\frac{\varphi_{k_h}(x)}{p^{k_h+1}}+C'\frac{\varphi_{k_{h-1}}(x)}{p^{k_{h-1}+1}}+\ldots.$$

sont congrus suivant le module p, on aura

$$A'\equiv A,\quad B'\equiv B,\quad \ldots,\quad K'\equiv K,\quad L'\equiv L \pmod{p},$$

de sorte que tous les coefficients dans les différences

$$A'-A,\ B'-B,\ \ldots,\ L'-L$$

seront divisibles par p.

En effet, la différence

$$\frac{(A'-A)\varphi_{m-1}(x)}{p^{m+1}}+\frac{(B'-B)\varphi_{k_h}(x)}{p^{k_h+2}}+\frac{(C'-C)\varphi_{k_{h-1}}(x)}{p^{k_{h-1}+2}}+\ldots$$

étant, par hypothèse, un nombre entier, et p^m la plus haute puissance de p qui puisse figurer dans les dénominateurs des nombres complexes entiers, s'ils sont réduits à leurs plus simples expressions, on voit que les coefficients de toutes puissances de x dans la fonction

$$(A'-A)\varphi_{m-1}(x)+(B'-B)(p^{m-k_h}\varphi_{k_h}(x)+(C'-C)p^{m-k_{h-1}}\varphi_{k_{h-1}}(x)+\ldots$$

doivent être divisibles par p, ou, ce qui revient au même

$$A'-A\equiv 0 \pmod{p}.$$

Donc

$$\frac{(A'-A)\varphi_{m-1}(x)}{p^{m+1}}$$

est un nombre entier.

Il résulte de là que le nombre $\frac{(B'-B)\varphi_{k_h}(x)}{p^{k_h+2}}+\frac{(C'-C)\varphi_{k_{h-1}}(x)}{p^{k_{h-1}+2}}+\ldots$ le sera aussi. Mais, la fonction

$$(B'-B)\varphi_{k_h}(x)+(C'-C)p^{k_h-k_{h-1}}\varphi_{k_{h-1}}(x)+\ldots$$

étant du degré inférieur à celui de $\varphi_{m-1}(x)$, on voit que les coefficients de toutes les puissances de x dans cette fonction doivent être divisibles par p. Donc

$$B' - B \equiv 0 \pmod{p}.$$

On s'assurera de la même manière que $C' - C \equiv 0 \pmod{p}$, etc. On en conclut que la quantité des nombres complexes entiers incongrus entre eux suivant le module p et non divisibles par p est égale à $p^n - 1$.

En effet, les coefficients des fonctions A, B, C, ..., L sont respectivement en nombres

$$n - \mu_{m-1}, \quad \mu_{m-1} - \mu_{kh}, \quad \mu_{k_h} - \mu_{kh-1}, \quad \ldots, \quad \mu_k;$$

chacun d'eux a, suivant le module p, p valeurs distinctes. Si l'on exclut le nombre pour lequel tous les coefficients des A, B, ..., L s'annulent, on aura $p^n - 1$ nombres incongrus suivant le module p.

Remarque. — La formule générale (1), pour les nombres complexes entiers pris suivant le module p, suppose que les nombres $\frac{\varphi_{m-1}(x)}{p^m}$, $\frac{\varphi_{k_h}(x)}{p^{k_h+1}}$, ... soient connus.

Tous les nombres pourront effectivement être déterminés après un nombre fini d'opérations. En effet, considérons des nombres complexes de la forme

$$\frac{a + bx + cx^2 + \ldots + lx^{n-1}}{p^i},$$

en supposant l'exposant i donné et les coefficients $a, b, c, \ldots, l$ compris entre zéro et p^i. Ces nombres étant en nombre fini, on peut toujours reconnaître parmi eux ceux qui sont entiers et choisir celui pour lequel la fonction $a + bx + cx^2 + \ldots + lx^{n-1}$ aura le moindre degré possible.

Il existe des méthodes pour trouver ces nombres $\frac{\varphi_{m-1}(x)}{p^m}$, $\frac{\varphi_{k_h}(x)}{p^{k_h+1}}$, ... plus promptement; mais je ne m'arrête pas sur ce point, n'y voyant rien d'essentiel.

26. D'après ce qui a été établi dans le numéro précédent, on

peut toujours reconnaître si un nombre complexe donné

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

f et φ désignant des fonctions entières à coefficients entiers, est un nombre entier.

En effet, ce nombre peut être représenté sous la forme

$$y = \frac{\psi(x)}{N},$$

$\psi(x)$ étant un polynôme à coefficients entiers qui n'ont pas avec N de diviseur commun.

Cela posé, si N est divisible par un nombre premier qui n'appartient pas aux modules exceptionnels pour l'équation $F(x) = 0$, on en conclut que y ne sera pas un nombre entier.

Maintenant supposons

$$N = p^m p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s},$$

$p, p_1, \ldots, p_s$ étant des modules exceptionnels.

Alors $\frac{\psi(x)}{p^m}, \frac{\psi(x)}{p_1^{m_1}}, \ldots, \frac{\psi(x)}{p_s^{m_s}}$ doivent être des nombres entiers si $\frac{\psi(x)}{N}$ en est un.

Réciproquement, si $\frac{\psi(x)}{p^m}, \frac{\psi(x)}{p_1^{m_1}}, \ldots, \frac{\psi(x)}{p_s^{m_s}}$ sont des nombres entiers, le nombre $\frac{\psi(x)}{N}$ le sera.

Effectivement, la somme $\frac{\psi(x)}{p^m} + \frac{\psi(x)}{p_1^{m_1}} + \cdots + \frac{\psi(x)}{p_s^{m_s}}$ est égal à $\frac{M\psi(x)}{N}$, M étant un nombre ordinaire premier avec N. Donc on pourra trouver deux nombres P et Q tels qu'on ait

$$PM - QN = 1.$$

En remarquant que $\frac{PM\psi(x)}{N} = \frac{\psi(x)}{N} + Q\psi(x)$ est un nombre entier, on conclut que $\frac{\psi(x)}{N}$ le sera.

Nous sommes donc amené à reconnaître si les nombres $\frac{\psi(x)}{p^m}$,

$\frac{\psi(x)}{p_1^{m_1}}, \ldots$ sont entiers. Cela se fait au moyen de la formule (1) du numéro précédent et des formules analogues pour les autres nombres premiers $p_1, p_2, \ldots$.

27. Dans ce numéro et dans les suivants, nous allons démontrer quelques théorèmes qui nous seront indispensables pour décomposer les nombres complexes en facteurs idéaux.

Désignons par

$$(1) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma,$$

σ étant égal à $p^n - 1$, les $p^n - 1$ nombres incongrus suivant le module p. Si l'on exclut les nombres complexes qui sont multiples de p. chaque nombre sera congru à l'un des termes de la suite (1).

Nous nommerons le nombre complexe α *premier avec le module* p si le produit $\alpha\beta$ n'est pas divisible par p, quel que soit le nombre de la suite (1) que l'on prend au lieu de β.

Dans le cas contraire, les nombres α et β ont des *facteurs communs*.

Nous dirons que deux nombres α et β n'ont pas de *diviseurs communs avec* p ou qu'ils *sont premiers entre eux suivant le module* p si les nombres $\alpha\gamma$ et $\beta\gamma$ ne sont pas divisibles par p ensemble, quel que soit le nombre γ de la suite (1). Remarquons maintenant que la norme du nombre α ne sera pas divisible par p si α est premier avec p

En effet, soit au contraire $N(\alpha)$ divisible par p. Alors on pourra trouver, comme nous allons voir, un nombre β non divisible par p et tel que $\alpha\beta \equiv 0 \pmod{p}$.

Désignons par $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{n-1}$ les valeurs du nombre α correspondant aux autres racines de l'équation fondamentale $F(x) = 0$ et par A le produit $\alpha'\alpha'' \ldots \alpha^{(n-1)}$.

Supposons A divisible par p^ν et non divisible par $p^{\nu+1}$ (ν peut être égal à zéro). Donc $\frac{A}{p^\nu}$ sera un nombre complexe non divisible par p. Le produit $B = \alpha \frac{A}{p^\nu}$ sera un nombre entier ordinaire, divisible par p, car $B^n = N(\alpha) N\left(\frac{A}{p^\nu}\right)$. Il résulte de là qu'on peut prendre au lieu de

β le nombre congru à $\frac{A}{p^\nu}$ suivant le module p. Donc le nombre α ne sera pas premier avec p, comme nous avons supposé.

Réciproquement, si la norme $N(\alpha)$ du nombre complexe α n'est pas divisible par p, il n'existe aucun nombre β non divisible par p, et tel que le produit $\alpha\beta$ soit divisible par p.

En effet, supposons au contraire que β soit un tel nombre. On a

$$\alpha\beta = p\gamma,$$

γ étant un nombre complexe entier.

Le nombre α, comme on sait, est la racine de l'équation

$$\alpha^n + q_1\alpha^{n-1} + q_2\alpha^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$

à coefficients entiers, dont le dernier, q_n, n'est pas divisible par p, car il est égal à la norme $N(\alpha)$.

Il suit de là que le nombre β est la racine de l'équation

$$\text{(I)} \qquad q_n\left(\frac{\beta}{p}\right)^n + q_{n-1}\gamma\left(\frac{\beta}{p}\right)^{n-1} + \ldots + \gamma^n = 0.$$

Mais le nombre β, comme un nombre entier, satisfait encore à l'équation

$$\text{(II)} \qquad p^n\left(\frac{\beta}{p}\right)^n + g_1 p^{n-1}\left(\frac{\beta}{p}\right)^{n-1} + \ldots + g_n = 0,$$

$g_1, g_2, \ldots, g_n$ étant des nombres entiers ordinaires.

Le nombre q_n étant premier avec p, on pourra trouver deux entiers M et N tels qu'on ait

$$q_n M + N p^n = 1.$$

En multipliant l'équation (I) par M et l'équation (II) par N, on aura, après l'addition,

$$\left(\frac{\beta}{p}\right)^n + (q_{n-1}\gamma M + g_1 p^{n-1} N)\left(\frac{\beta}{p}\right)^{n-1} + \ldots = 0,$$

d'où l'on voit que $\frac{\beta}{p}$ est un nombre complexe entier, et, par conséquent, β est divisible par p, ce qui est contraire à la supposition.

Théorème. — *Si les nombres complexes* A *et* B *n'ont pas de diviseurs communs avec* p, *ainsi que les nombres* A *et* C, *les nombres* A *et* BC *n'auront pas aussi de diviseurs communs avec* p.

En effet, supposons au contraire que les nombres A et BC ne soient pas des nombres premiers entre eux suivant le module p; alors, par conséquent, on pourrait trouver un nombre complexe R tel que AR et BCR soient divisibles par p; mais CR n'est pas divisible par p, car autrement A et C auraient des diviseurs communs avec p. En remarquant maintenant que le produit ACR est encore divisible par p, car p divise le facteur AR, on voit qu'il existe un nombre complexe CR non divisible par p et tel que les produits $A \times CR$ et $B \times CR$ soient les multiples de p.

Donc A et B ont des diviseurs communs avec p, ce qui est contraire à la supposition.

28. Théorème. — *Si le nombre complexe* A *n'a pas de diviseurs communs avec* p, *il existe dans la suite* (1) (n° 27) *un nombre* M *tel qu'on ait*

$$AM \doteq 1 \pmod{p}.$$

En effet, considérons la suite des nombres

$$\text{(I)} \qquad A\alpha_1,\ A\alpha_2,\ \ldots,\ A\alpha_\sigma.$$

Ces nombres sont congrus suivant le module p aux nombres (1) (n° 27), abstraction faite de l'ordre. En effet, aucun des nombres (I) n'est divisible par p, car autrement A ne serait pas un nombre premier avec p. Par la même raison, tous les nombres de la suite (I) sont incongrus suivant le module p. Donc l'un d'eux est congru à l'unité, qui est congru à l'un des termes de la suite (I).

29. Théorème. — *Soient* A *et* B *deux nombres complexes premiers*

entre eux suivant le module p. On peut toujours trouver deux nombres complexes entiers M *et* N *tels qu'on ait*

$$AM - BN \equiv 1 \pmod{p}.$$

Considérons deux nombres complexes quelconques μ et ν, dont chacun est premier avec le module p.

Soit

$$(1) \qquad A\mu - B\nu \equiv \xi \pmod{p}.$$

Supposons, en premier lieu, que ξ soit un nombre premier avec le module p.

On pourra alors trouver (nº **28**) un nombre Q tel qu'on ait

$$Q\xi \equiv 1 \pmod{p}.$$

Par conséquent, en posant

$$M \equiv Q\mu, \quad N \equiv Q\nu \pmod{p},$$

on aura

$$AM - BN \equiv 1 \pmod{p}$$

et le théorème sera démontré.

Considérons, en second lieu, le cas dans lequel ξ n'est pas premier avec le module p.

Alors les nombres A et ξ, ainsi que B et ξ, n'auront pas de diviseurs communs avec le module p. En effet, supposons, par exemple, les nombres B et ξ ayant des facteurs communs avec le module p. Il résulte de là qu'il existe un nombre Q non divisible par p et tel qu'on ait

$$BQ \equiv 0 \quad \text{et} \quad \xi Q \equiv 0 \pmod{p}.$$

On voit par la congruence (1) que $A\mu Q$ sera aussi divisible par p. En multipliant ce nombre par un nombre μ' satisfaisant à la congruence

$$\mu\mu' \equiv 1 \pmod{p},$$

on trouve que le nombre AQ est divisible par p. Mais ce résultat est

contre l'hypothèse, car les deux nombres AQ et BQ ne peuvent être divisibles l'un et l'autre par p. Donc les nombres A et ξ, ainsi que B et ξ, n'ont pas de diviseurs communs avec p.

Remarquons encore que le nombre ξ peut toujours être supposé non divisible par p. En effet, soit

$$(2) \qquad A\mu \equiv B\nu \pmod{p}.$$

Cette congruence ne peut être satisfaite qu'en supposant chacun des nombres A et B premier avec le module p. En effet, si par exemple B a des facteurs communs avec p, on pourra déterminer un nombre Q tel qu'on ait

$$BQ \equiv 0 \pmod{p}.$$

Alors la congruence (2) nous donne

$$A\mu Q \equiv 0 \pmod{p},$$

d'où l'on déduit, comme ci-dessus, que

$$AQ \equiv 0 \pmod{p},$$

ce qui ne peut avoir lieu, A et B étant deux nombres premiers entre eux suivant le module p.

Donc la congruence (2) suppose chacun des nombres A et B premier avec p. Mais, cela étant, il est facile de déduire notre théorème du théorème du n° 28. En effet, on peut prendre $N = 0$ et déterminer M par la congruence

$$AM \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ainsi nous supposons ξ non divisible par p.

Comme les nombres A et B sont premiers entre eux suivant le module p, l'un des deux nombres $A\xi$, $B\xi$ au moins ne sera pas divisible par p.

Supposons, pour fixer les idées, $A\xi$ non divisible par p. D'après le théorème du n° 27, on voit que les nombres $A\xi$ et B sont premiers entre eux suivant le module p.

Considérons maintenant le nombre

$$A\xi\mu - B\nu \equiv \xi_1 \pmod{p}.$$

Dans le cas où ξ_1 est un nombre premier avec le module p, on démontre notre théorème tout de suite; mais, si ξ n'est pas un nombre premier avec p, les nombres ξ_1 et B, ainsi que ξ_1 et $A\xi$, sont premiers entre eux suivant le module p. Il suit de là que ξ_1 et ξ ne sont pas des nombres congrus suivant le module p. Dans ce cas, on peut passer du nombre ξ_1 au nombre ξ_2 de la même manière que de ξ à ξ_1, etc.

Remarquons que la série de nombres $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ est toujours finie, car ils sont tous incongrus suivant le module p. On voit donc que nous arrivons enfin à une congruence

$$A\mu' - B\nu' \equiv \eta \pmod{p},$$

η étant un nombre premier avec le module p. Mais de cette congruence il résulte, comme nous avons vu, notre théorème.

Remarque. — En poursuivant la même marche, il est facile de déduire le théorème plus général :

Soient A *et* B *deux nombres complexes premiers entre eux suivant le module* p. *On peut toujours trouver deux nombres complexes entiers* M *et* N *tels qu'on ait*

$$AM - BN \equiv 1 \pmod{p^m},$$

m *étant un nombre entier et positif.*

30. Nous compterons parmi les nombres complexes premiers un nombre réel p si tous les nombres

(1) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma$$

sont premiers avec p.

Pour décomposer les autres nombres premiers ordinaires en facteurs

premiers idéaux, nous supposons que les termes de la suite (1) ne sont pas pris arbitrairement, mais qu'ils satisfont à une certaine condition que nous allons connaître.

Soit α un des nombres de la suite (1), dont la norme est divisible par p.

De tous les nombres complexes entiers $\alpha + p\xi$ congrus à α suivant le module p, nous choisirons un de ceux dont les normes contiennent comme facteur le moindre degré possible du nombre p.

Voici comment on peut trouver ce nombre.

Supposons que

$$N(\alpha) = p^h P,$$

P étant un nombre non divisible par p.

Soit

$$(2) \qquad \alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \ldots$$

la suite composée de tous les nombres congrus à α suivant le module p et telle qu'il n'y en ait que deux congrus suivant le module p^h.

On sait par le n° 25 comment cette suite (2) peut être trouvée.

Soit maintenant A un nombre complexe quelconque congru à α suivant le module p. Il sera congru suivant le module p^h à un nombre de la suite (2).

Supposant, par exemple,

$$A \equiv \beta \pmod{p^h},$$

on aura

$$N(A) \equiv N(\beta) \pmod{p^h}.$$

Donc, si la norme N(A) contient p comme facteur moins de h fois, il en contient le même nombre de fois que la norme $N\beta$.

Il suit de là que parmi les termes de la suite (2) on pourra toujours trouver au moins un nombre dont la norme contient comme facteur le moindre degré possible du nombre p.

Supposons que ce nombre soit le nombre α lui-même qui figure dans la suite (1) et que tous les nombres de cette suite non premiers avec p satisfassent à la même condition que le nombre α.

Cela posé, nous allons établir une propriété importante des nombres contenus dans la suite (1).

Chaque nombre α de la suite (1) ayant la norme divisible par p^μ satisfait à l'équation

$$\alpha^n + b_1\alpha^{n-1} + b_2\alpha^{n-2} + \ldots + b_{n-1}\alpha + b_n = 0, \tag{3}$$

dans laquelle le coefficient b_n est divisible par p^μ par hypothèse et les autres coefficients b_{n-1}, b_{n-2}, ... sont respectivement divisibles par $p^{\mu-1}$, $p^{\mu-2}$, ...

Pour démontrer cette proposition, considérons un nombre $\alpha - \lambda p$, λ étant un entier ordinaire.

Les nombres $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ désignant toutes les racines de l'équation (3), la norme du nombre complexe $\alpha - \lambda p$ se présente sous la forme

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\alpha - \lambda p) &= (\alpha - \lambda p)(\alpha' - \lambda p)\ldots(\alpha^{(n-1)} - \lambda p)\\ &= \pm(p^n\lambda^n + b_1 p^{n-1}\lambda^{n-1} + b_2 p^{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + b_n).\end{aligned}$$

Cette norme doit être divisible par p^μ, quel que soit λ, car p^μ divise $\mathrm{N}(\alpha)$, contenant comme facteur le moindre degré du nombre p.

En posant $b_n = p^\mu c_n$, on voit que le nombre

$$p^{n-1}\lambda^n + b_1 p^{n-2}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\lambda + p^{\mu-1}c_n$$

doit être divisible par $p^{\mu-1}$, quel que soit λ. Donc b_{n-1} est divisible par p, et l'on peut poser $b_{n-1} = pc_{n-1}$, c_{n-1} étant un nombre entier. Puis on voit que le nombre

$$p^{n-2}\lambda^n + b_1 p^{n-3}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-2}\lambda^2 + c_{n-1}\lambda + p^{\mu-2}c_n$$

doit être divisible par $p^{\mu-2}$, λ étant quelconque. Donc les coefficients b_{n-2} et c_{n-1} doivent être divisibles par p.

Il est clair que l'on peut poursuivre de cette manière jusqu'à ce que l'on ait démontré la divisibilité du nombre b_{n-1} par $p^{\mu-1}$, b_{n-2} par $p^{\mu-2}$, ... Cette démonstration peut être en défaut dans quelques cas particuliers si p est inférieur à n.

En voici une autre qui ne souffre aucune exception.

Soient

$$\begin{aligned} b_n &= p^{\mu} c_n, \quad b_{n-1} = p^{\mu_1} c_{n-1}, \ldots, \\ b_{n-k} &= p^{\mu_k} c_{n-k}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

c_n, c_{n-1}, ..., c_{n-k} étant des entiers non divisibles par p. Désignons par $\lambda = \frac{r}{s}$, r et s étant des nombres entiers, la plus grande valeur des fractions

$$\mu - \mu_1, \quad \frac{\mu - \mu_2}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{\mu - \mu_k}{k}, \quad \ldots.$$

Cela posé, nous ferons voir que le nombre $\frac{p^r c_n^s}{\alpha^s}$ est un nombre entier.

En effet, le nombre $\frac{p^\lambda c_n}{\alpha}$ est une racine de l'équation

$$z^n + c_{n-1} p^{\mu_1+\lambda-\mu} z^{n-1} + c_{n-2} c_n p^{\mu_2+2\lambda-\mu} z^{n-2} + \ldots = 0.$$

Les exposants $\mu_1 + \lambda - \mu$, $\mu_2 + 2\lambda - \mu$, ... peuvent être fractionnaires, mais aucun d'eux ne peut être négatif, car $\mu_i + i\lambda - \mu \geqq 0$ ou, ce qui est le même, $\lambda \geqq \frac{\mu - \mu_i}{i}$. Cela est d'accord avec la définition de λ.

Il résulte de là que le nombre $\frac{p^r c_n^s}{\alpha^s}$ est un nombre entier.

Considérons maintenant un nombre complexe entier

$$\zeta = \alpha - \frac{p^{ri+1} c_n^{si}}{\alpha^{si}},$$

congru à α suivant le module p, i étant un entier quelconque ordinaire et positif.

On aura évidemment

$$\mathrm{N}(\zeta) = \frac{\mathrm{N}(\alpha^{si+1} - p^{ri+1} c_n^{si})}{\mathrm{N}(\alpha^{si})}.$$

Afin de savoir quelle puissance de p est contenue comme facteur

dans la norme $N\zeta$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} & N(\alpha^{si+1} - p^{ri+1} c_n^{si}) \\ & \quad = N\left(\alpha - p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right) N\left(\alpha - \omega p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right) N\left(\alpha - \omega^2 p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right) \cdots, \end{aligned}$$

ω étant une racine primitive $si+1^{\text{ième}}$ de l'unité, et $N\left(\alpha - \omega^k p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right)$ désignant le produit

$$\left(\alpha - \omega^k p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right)\left(\alpha' - \omega^k p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right)\left(\alpha'' - \omega^k p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right) \cdots,$$

où $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sont toutes les racines de l'équation (3).

En posant

$$\Phi(z) = (z-\alpha)(z-\alpha')(z-\alpha'')\ldots = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n,$$

il vient

$$N(\alpha^{si+1} - p^{ri+1} c_n^{si}) = \pm \Phi\left(p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right) \Phi\left(\omega p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right) \Phi\left(\omega^2 p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right) \cdots,$$

où

$$\Phi\left(p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right) = p^{\mu} c_n + p^{\mu_1 + \frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}} c_{n-1} + p^{\mu_2 + 2\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si\,2}{si+1}} c_{n-2} + \cdots.$$

On pourra assigner un nombre i de telle manière, que parmi les exposants μ, $\mu_1 + \frac{ri+1}{si+1}$, $\mu_2 + 2\frac{ri+1}{si+1}$, $\ldots$ il n'y en ait pas deux égaux entre eux. Soit Δ celui des exposants qui a la valeur moindre.

Maintenant il y a deux cas à distinguer : $\lambda > 1$ et $\lambda \leqq 1$.

Supposons d'abord $\lambda > 1$. On va voir que Δ est inférieur à μ.

En effet, soit $\lambda = \frac{\mu - \mu_f}{f}$; on aura

$$\mu_f + \lambda f = \mu.$$

Mais, $\lambda = \frac{r}{s}$ étant supérieur à l'unité, on a

$$\lambda > \frac{ri+1}{si+1},$$

et par conséquent

$$\mu_f + f\frac{ri+1}{si+1} < \mu.$$

Donc, *a fortiori*, $\Delta < \mu$.

Cela posé, on s'assure aisément que le nombre entier égal au produit

$$\Phi\left(p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right)\Phi\left(\omega p^{\frac{ri+1}{si+1}} c_n^{\frac{si}{si+1}}\right)\ \ldots$$

contient $(si+1)\Delta$ fois le facteur p. Il résulte de là que la norme ζ le contient $(si+1)\Delta - si\mu < \mu$ fois, ce qui est absurde, en vertu du choix des nombres α, car ζ est congru à α suivant le module p.

Ainsi $\lambda \leqq 1$, et par conséquent

$$\frac{\mu - \mu_h}{h} \leqq 1,$$

quel que soit h, d'où

$$\mu_h \geqq \mu - h.$$

Donc le théorème est démontré.

Corollaire I. — Le nombre complexe $\frac{pc_n}{\alpha}$ est un nombre entier.

En effet, l'équation (3) multipliée par $\frac{c_n^{\mu-1}}{\alpha^\mu}$ nous donne la suivante,

$$\left(\frac{pc_n}{\alpha}\right)^\mu + \frac{b_{n-1}}{p^{\mu-1}}\left(\frac{pc_n}{\alpha}\right)^{\mu-1} + \frac{b_{n-2}c_n}{p^{\mu-2}}\left(\frac{pc_n}{\alpha}\right)^{\mu-2} + \ldots = 0;$$

$\frac{b_{n-1}}{p^{\mu-1}}, \frac{b_{n-2}c_n}{p^{\mu-2}}, \cdots$ étant des nombres entiers. On en conclut que $\frac{pc_n}{\alpha}$ est un nombre entier. Donc, pour chaque nombre α de la suite (1), il existe un nombre ordinaire H non divisible par p, et tel que le produit Hp soit divisible par α.

Corollaire II. — Soit β un nombre complexe non compris dans la suite

(1) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma$$

et non divisible par p.

Nous ferons voir qu'il existe alors dans cette suite un nombre α tel que le produit $H\beta$ soit divisible par α, H étant un nombre ordinaire premier avec p.

En effet, supposant β congru au nombre α de la suite (1), on aura

$$\beta = \alpha + p\gamma,$$

γ étant un nombre entier complexe. Désignons maintenant par H un nombre non divisible par p et tel que le produit Hp soit divisible par α (corollaire I). Alors il vient

$$H\beta = \alpha(H + \delta\gamma),$$

δ étant égal à $\frac{Hp}{\alpha}$. C. Q. F. D

51. Nous dirons, pour abréger, que le nombre β contient tous les facteurs du nombre p appartenant au nombre α s'il existe un nombre A premier avec p et tel que $A\beta$ soit divisible par α.

Désignons par H la norme N(A), H étant un nombre ordinaire non divisible par p. On voit que $H\beta$ est divisible par α. Ainsi, lorsque β contient tous les facteurs de p appartenant à α, il existe un nombre ordinaire H non divisible par p et tel que $H\beta$ soit divisible par α.

Théorème. — *Si le produit $\beta\gamma$ de deux nombres complexes contient tous les facteurs de p appartenant à α et si les nombres α et β n'ont aucun facteur commun avec p, le nombre γ contient tous les facteurs de p appartenant à α.*

Posons, pour abréger,

$$N(\alpha) = p^\lambda b,$$

b n'étant pas divisible par p.

Il existe, par hypothèse, un nombre ordinaire H non divisible par p et tel que le produit $H\beta\gamma$ soit divisible par α. On peut prendre b au lieu de H (n° **24**), et soit $\frac{b\beta\gamma}{\alpha} = \delta$, δ étant un nombre entier complexe. Mais, α et β n'ayant point de facteurs communs avec p, on pourra trouver deux nombres complexes ξ, η tels qu'on ait (n° **29**)

$$\beta\xi - \alpha\eta \equiv 1 \pmod{p^\lambda}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\beta\xi = \alpha\eta + 1 + p^\lambda \varepsilon,$$

ε étant encore un nombre entier. Donc

$$\xi\delta = \frac{b\gamma}{\alpha} + b\eta\gamma + \frac{bp^\lambda \varepsilon\gamma}{\alpha}.$$

En ayant égard à ce que $\frac{bp^\lambda}{\alpha}$ est un nombre entier, on voit que $\frac{b\gamma}{\alpha}$ le sera aussi; par conséquent, γ contient tous les facteurs de p appartenant à α.

32. Théorème. — *Si les deux nombres complexes β et γ ont des diviseurs communs avec p, et si aucun de ces deux nombres ne contient tous les facteurs de p appartenant à l'autre, il existe un tel nombre α que chacun d'eux contienne tous les facteurs de p appartenant à α.*

En effet, les nombres β et γ ayant des diviseurs communs avec p, on pourra toujours trouver dans la suite

(1) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma,$$

que nous avons considérée dans le n° **30**, un nombre M tel que les nombres $M\beta$ et $M\gamma$ soient divisibles par p (n° **27**). Soient

$$M\beta = p\beta_1, \quad M\gamma = p\gamma_1.$$

D'ailleurs, on sait par le n° **30** qu'il existe toujours un nombre ordinaire H, non divisible par p, tel que $\frac{Hp}{M}$ soit un nombre entier.

En désignant $\frac{Hp}{M}$ par α, on aura

(2) $$H\beta = \alpha\beta_1, \quad H\gamma = \alpha\gamma_1.$$

Donc les nombres β, γ contiennent l'un et l'autre tous les facteurs de p appartenant à α.

D'après le corollaire II (n° **30**), il est permis de supposer que α

soit encore un terme de la suite (1). De plus, aucun des nombres β_1 et γ_1 ne sera premier avec le module p.

En effet, supposons, par exemple, β_1 premier avec le module p. Alors (n° **31**) α contiendra tous les facteurs de p appartenant à β. Donc γ les contient aussi, ce qui est contraire à la supposition.

Les équations (2) nous donnent, en prenant les normes,

$$H^n N(\beta) = N(\alpha) N(\beta_1),$$
$$H^n N(\gamma) = N(\alpha) N(\gamma_1).$$

En ayant égard à ce que $N(\beta_1)$ et $N(\gamma_1)$ sont divisibles par p (n° **27**), on en conclut que p rentre comme facteur dans la norme $N(\alpha)$ moins de fois que dans les normes $N(\beta)$ et $N(\gamma)$.

33. Je reprends maintenant la suite des nombres

(1) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma$$

incongrus suivant le module p.

Nous dirons que le nombre α de cette suite ne contient qu'un facteur premier idéal du nombre p si chaque nombre non premier avec α suivant le module p contient tous les facteurs de p appartenant à α (n° **31**).

Le corollaire II (n° **30**) nous fait voir qu'il suffit de comparer le nombre α à tous les termes de la suite (1) pour savoir s'il ne contient qu'un facteur premier du nombre p. Faisons d'abord voir que de tels nombres α existent effectivement.

Soit β un nombre quelconque de cette suite non premier avec p. Supposons qu'il existe un autre nombre γ non premier avec β suivant le module p et ne contenant pas tous les facteurs premiers de p appartenant à β.

Cela posé, on voit, d'après le numéro précédent, qu'il existe dans la suite (1) un nombre α tel que β contienne tous les facteurs de p appartenant à α; la norme $N(\alpha)$ contiendra p comme facteur moins de fois que la norme $N(\beta)$.

Si α contient plus d'un facteur premier du nombre p, on peut, par la même raison, trouver dans la suite (1) un nombre α' tel que α con-

tienne tous les facteurs de p appartenant à α', et p rentrera dans la norme $N(\alpha')$ avec l'exposant moindre que dans la norme $N(\alpha)$.

On voit que, en poursuivant la même marche, on trouvera un nombre qui ne contient qu'un seul facteur premier de p.

Ainsi, chaque nombre non premier avec p contient au moins un facteur premier de p appartenant au nombre compris dans la suite (1) et qui ne comprend point d'autres facteurs de p.

Soient

$$(2) \qquad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$$

tous les nombres de la suite (1), dont chacun ne contient qu'un seul facteur premier idéal du nombre p. Si les deux nombres de cette suite ne sont pas premiers entre eux suivant le module p, nous dirons qu'ils contiennent un même facteur idéal du nombre p. On peut choisir dans la suite (2) tous les nombres qui contiennent des facteurs distincts de p. Soient ν, ν_1, ν_2, ..., ν_s ces nombres.

Nous dirons que le nombre complexe α contient le facteur de p appartenant m fois au nombre ν s'il contient tous les facteurs de p appartenant à ν^m et ne contient pas tous les facteurs de p appartenant à ν^{m+1}.

Il suit de cette définition que, dans ce cas, $H\alpha = \nu^m\beta$, H étant un nombre ordinaire non divisible par p, et β un nombre complexe entier.

En prenant les normes, il vient

$$H^n N(\alpha) = [N(\nu)]^m N(\beta).$$

Il en résulte que, pour chaque nombre donné α, m ne surpasse pas une limite finie. En effet, soient p^λ et p^μ les plus hautes puissances de p qui divisent $N(\alpha)$ et $N(\nu)$; on aura

$$\lambda \geqq m\mu.$$

34. Théorème. — *Le produit $\beta\gamma$ de deux nombres complexes contient le facteur idéal de p appartenant à ν autant de fois que les deux nombres β et γ ensemble.*

Supposons que β contienne ce facteur m fois et r fois γ. Ainsi, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} H\beta = \upsilon^m \beta_1, \\ H_1\gamma = \upsilon^r \gamma_1, \end{cases}$$

H et H_1 étant des entiers ordinaires non divisibles par p, β_1 et γ_1 deux nombres complexes entiers.

Nous allons voir que chacun des nombres β_1 et γ_1 ne contient point de facteur idéal de p appartenant à υ.

Supposons que, par exemple, β_1 le contienne. Alors nous aurons

$$h\beta_1 = \upsilon\beta_2,$$

où h désigne un nombre ordinaire non divisible par p, et β_2 un nombre complexe entier. Donc

$$Hh\beta = \upsilon^{m+1}\beta_2,$$

de sorte que β contiendrait tous les facteurs de p appartenant à υ^{m+1}, ce qui est contraire à la supposition.

Les égalités (1) nous donnent la suivante,

$$HH_1\beta\gamma = \upsilon^{m+r}\beta_1\gamma_1,$$

d'où l'on voit que le nombre $\beta\gamma$ contient tous les facteurs de p appartenant à υ^{m+r}. Maintenant, il nous reste à faire voir qu'il ne contient pas tous les facteurs de p appartenant à υ^{m+r+1}. Supposons, au contraire, que $h\beta\gamma = \upsilon^{m+r+1}\gamma_2$, h étant un nombre premier avec p et γ_2 un nombre complexe entier.

Il s'ensuit que

$$h\beta_1\gamma_1 = HH_1\upsilon\gamma_2.$$

Donc $\beta_1\gamma_1$ contient le facteur de p appartenant à υ, ce qui ne peut être en vertu du théorème n° **31**.

En s'appuyant sur les théorèmes établis, on démontre facilement toutes les propositions connues sur la divisibilité des nombres complexes.

Conditions pour que les constantes arbitraires d'une expression générale soient distinctes entre elles;

PAR M. W. DE MAXIMOVITCH.

Nous nous proposons ici d'établir les conditions analytiques qui doivent avoir lieu pour qu'il soit impossible de réduire le nombre de constantes arbitraires dans une expression sans diminuer sa généralité.

Cette question se ramène à une autre que nous allons traiter d'abord.

§ I. — *Conditions pour qu'il existe entre des fonctions données de plusieurs variables des relations linéaires à coefficients constants.*

Étant donné un système de fonctions

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$$

des variables indépendantes

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

on demande les conditions pour qu'il existe entre les fonctions proposées une ou plusieurs relations linéaires à coefficients constants.

Considérons tous les déterminants qu'on peut former avec les fonc-

tions A_1, A_2, ..., A_m et leurs dérivées partielles successives prises parmi celles dont l'ordre ne surpasse pas $(m-1)$, déterminants dont chaque colonne verticale contient des dérivées d'une même fonction et chaque ligne horizontale une même dérivée de toutes les fonctions. D'après cette définition, tous ces déterminants sont compris dans la formule

$$R_m = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_m \\ \dfrac{d^{k_1} A_1}{dx_\alpha\, dx_{\alpha'} \ldots dx_{\alpha''}} & \dfrac{d^{k_1} A_2}{dx_\alpha\, dx_{\alpha'} \ldots dx_{\alpha''}} & \ldots & \dfrac{d^{k_1} A_m}{dx_\alpha\, dx_{\alpha'} \ldots dx_{\alpha''}} \\ \dfrac{d^{k_2} A_1}{dx_\beta\, dx_{\beta'} \ldots dx_{\beta''}} & \dfrac{d^{k_2} A_2}{dx_\beta\, dx_{\beta'} \ldots dx_{\beta''}} & \ldots & \dfrac{d^{k_2} A_m}{dx_\beta\, dx_{\beta'} \ldots dx_{\beta''}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^{k_{m-1}} A_1}{dx_\gamma\, dx_{\gamma'} \ldots dx_{\gamma''}} & \dfrac{d^{k_{m-1}} A_2}{dx_\gamma\, dx_{\gamma'} \ldots dx_{\gamma''}} & \ldots & \dfrac{d^{k_{m-1}} A_m}{dx_\gamma\, dx_{\gamma'} \ldots dx_{\gamma''}} \end{vmatrix},$$

les ordres des dérivées k_1, k_2, ..., k_{m-1} ne surpassant pas $(m-1)$ et les indices des variables x_1, x_2, ..., x_n pouvant présenter toutes les combinaisons possibles. Dans cette formule, le nombre m étant quelconque, R_{m-1} désignera les déterminants analogues à R_m formés avec A_1, A_2, ..., A_{m-1} et leurs dérivées partielles d'ordre ne surpassant pas $(m-2)$.

LEMME. — *Lorsque tout déterminant R_m est nul et qu'en même temps l'un des déterminants R_{m-1} est différent de zéro, alors A_m s'exprime inéairement au moyen de A_1, A_2, ..., A_{m-1} et de constantes.*

Désignons par u_1, u_2, ..., u_{m-1} des inconnues et considérons le système linéaire

$$(1)\quad \begin{cases} A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_{m-1} u_{m-1} + A_m = 0, \\ \dfrac{d^k A_1}{dx_i \ldots dx_j} u_1 + \dfrac{d^k A_2}{dx_i \ldots dx_j} u_2 + \ldots + \dfrac{d^k A_{m-1}}{dx_i \ldots dx_j} u_{m-1} + \dfrac{d^k A_m}{dx_i \ldots dx_j} = 0, \end{cases}$$

où k a toutes les valeurs depuis l'unité jusqu'à $(m-2)$ inclusivement, et les indices i, ... j des variables x présentent toutes les combinaisons possibles.

Considérons encore le système suivant :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^{m-1}A_1}{dx_i\ldots dx_j}u_1+\frac{d^{m-1}A_2}{dx_i\ldots dx_j}u_2+\ldots\\ &\qquad+\frac{d^{m-1}A_{m-1}}{dx_i\ldots dx_j}u_{m-1}+\frac{d^{m-1}A_m}{dx_i\ldots dx_j}=0,\end{aligned}\right.$$

les indices des variables x présentant toutes les combinaisons possibles. A l'égard du système (1) on remarque que le déterminant de $(m-1)$ équations (choisies comme l'on voudra, mais sans omettre la première) est précisément l'un des déterminants que nous avons désignés par R_{m-1}.

D'autre part, tout déterminant R_m est visiblement formé avec les coefficients des inconnues et les termes indépendants de m équations quelconques des systèmes (1) et (2) réunis; ce déterminant égalé à zéro est la résultante de l'élimination de $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ entre les m équations correspondantes : c'est donc la condition suffisante de leur compatibilité.

Ainsi, lorsque l'un des déterminants R_{m-1} n'est pas nul, et qu'en même temps tout déterminant R_m est égal à zéro, alors le système (1) présente $(m-1)$ équations distinctes, soit

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &A_1u_1+A_2u_2+\ldots+A_{m-1}u_{m-1}+A_m=0,\\ &\frac{d^kA_1}{dx_i\ldots dx_j}u_1+\frac{d^kA_2}{dx_i\ldots dx_j}u_2+\ldots+\frac{d^kA_{m-1}}{dx_i\ldots dx}u_{m-1}+\frac{d^kA_m}{dx_i\ldots dx_j}=0,\\ &k=k_1,k_2,\ldots,k_{m-1}\leq(m-2),\end{aligned}\right.$$

système dont les autres équations (1) et (2) sont des conséquences. En d'autres termes, on peut résoudre le système (3) par rapport à u_1, $u_2, \ldots, u_{m-1}$, et les valeurs trouvées satisfont en même temps à toutes les équations (1) et (2); nous allons montrer que ces valeurs de u_1, $u_2, \ldots, u_m$ sont constantes, et, partant, notre lemme sera établi par la première des équations (3).

Différentiant l'une quelconque des équations (3) par rapport à l'une

des variables x, on a

$$(4)\begin{cases} \dfrac{d^{k+1}A_1}{dx\,dx_i\ldots dx_j}u_1+\dfrac{d^{k+1}A_2}{dx\,dx_i\ldots dx_j}u_2+\ldots+\dfrac{d^{k+1}A_{m-1}}{dx\,dx_i\ldots dx_j}u_{m-1}+\dfrac{d^{k+1}A_m}{dx\,dx_i\ldots dx_j} \\ \qquad +\dfrac{d^kA_1}{dx_i\ldots dx_j}\dfrac{du_1}{dx}+\dfrac{d^kA_2}{dx_i\ldots dx_j}\dfrac{du_2}{dx}+\cdots+\dfrac{d^kA_{m-1}}{dx_i\ldots dx_j}\dfrac{du_{m-1}}{dx}=0, \\ k=0,k_1,k_2,\ldots,k_{m-2}=(m-2). \end{cases}$$

La somme des termes de la première ligne est nulle séparément, n'étant autre chose que le premier membre de l'une des équations (1) ou (2).

Mais après suppression des parties nulles les équations (4) deviennent linéaires et homogènes par rapport aux dérivées de u_1, u_2, ..., u_{m-1} et entraînent comme conséquences les équations suivantes :

$$R_{m-1}\frac{du_1}{dx}=0,\quad R_{m-1}\frac{du_2}{dx}=0,\quad \ldots,\quad R_{m-1}\frac{du_{m-1}}{dx}=0,$$

le déterminant R_{m-1} étant le même que celui du système (3), et, comme ce déterminant n'est pas nul, il en résulte que u_1, u_2, ..., u_{m-1} sont indépendants de chacune des variables x. C. Q. F. D.

Théorème I. — *Afin qu'il existe au moins une relation linéaire homogène à coefficients constants entre les fonctions* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, *il faut et il suffit que tout déterminant* R_m *soit nul.*

Cette condition est nécessaire, car, s'il existe entre $A_1, A_2, \ldots, A_m$ une relation linéaire à coefficients constants, on peut la différentier partiellement par rapport à chaque variable x autant de fois qu'on voudra, et l'on aura ainsi une même relation linéaire entre les éléments de chaque ligne horizontale de tout déterminant R_m, qui, par conséquent, sera égal à zéro. Réciproquement, si tout déterminant R_m est nul, alors il existe une relation linéaire entre A_1, A_2, ..., A_m. Effectivement, d'après le lemme, lorsque tout R_m est nul, alors A_m s'exprime au

moyen de $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$, à moins que tout R_{m-1} ne soit nul; mais si tout R_{m-1} est nul, alors, par ce même lemme (où l'on aura changé le nombre m en $m-1$), A_{m-1} s'exprime au moyen de $A_1, A_2, \ldots, A_{m-2}$ à moins que tout R_{m-2} ne soit nul, et ainsi de suite. Finalement, on trouve que A_3 s'exprime au moyen de A_1, A_2 à moins que tout R_2 ne soit nul, et dans ce dernier cas on s'assure directement que A_2 est en rapport constant à A_1, puisque, par supposition même,

$$R_2 = \begin{vmatrix} A_1, & A_2 \\ \dfrac{dA_1}{dx_i}, & \dfrac{dA_2}{dx_i} \end{vmatrix} = A_1 \frac{dA_2}{dx_i} - A_2 \frac{dA_1}{dx_i} = A_1^2 \frac{d}{dx_i}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

§ II. — *Conditions pour que les constantes arbitraires d'une expression soient distinctes entre elles.*

Une expression où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables indépendantes et $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des constantes arbitraires,

$$(1) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

représente l'ensemble infini de fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qu'on obtient en donnant à $a_1, a_2, \ldots, a_m$ toutes les valeurs possibles, et parfois il existe une autre expression

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n; b_1, b_2, \ldots, b_k), \quad k < m,$$

contenant moins de constantes que F et qui cependant représente le même ensemble de fonctions. De là les définitions suivantes :

I. *Deux expressions sont* équivalentes *si, en donnant toutes les valeurs possibles à toutes les constantes qui figurent dans l'une, on en déduit toutes les fonctions particulières comprises dans l'autre, et réciproquement.*

II. *Les constantes d'une expression sont* distinctes *lorsqu'il n'existe*

aucune expression avec moins de constantes que la proposée et qui lui soit équivalente.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème II. — *Afin que les constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_m$ d'une expression* F *soient distinctes, il faut et il suffit qu'il n'existe entre les fonctions*

$$\frac{dF}{da_1}, \frac{dF}{da_2}, \ldots, \frac{dF}{da_m}, \tag{3}$$

aucune relation linéaire homogène à coefficients constants ([1]).

Pour cela il faut et il suffit que parmi les dérivées partielles de F *par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et dont les ordres ne surpassent pas $(m-1)$, il se trouve au moins un seul système de m fonctions, soit*

$$F, \frac{d^{k_1}F}{dx_\alpha\, dx_{\alpha'} \ldots dx_{\alpha''}}, \frac{d^{k_2}F}{dx_\beta\, dx_{\beta'} \ldots dx_{\beta''}}, \ldots, \frac{d^{k_{m-1}}F}{dx_\gamma\, dx_{\gamma'} \ldots dx_{\gamma''}}, \tag{4}$$
$$k_1, k_2, \ldots, k_{m-1} \leqq (m-1),$$

entre lesquelles il n'existe aucune relation où $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ne figurent pas explicitement ([2]).

Lorsque $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dans (1) ne sont pas distinctes, alors (1) est par définition II équivalente à une expression (2) où le nombre k de constantes est inférieur à m, et par définition I, en donnant dans (1) à $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des valeurs déterminées quelconques, la fonction particulière ainsi trouvée peut être également tirée de (2) en y assignant à $b_1, b_2, \ldots, b_k$ des valeurs convenables. En d'autres termes, se donnant

---

([1]) Indépendants de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais pouvant dépendre de $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

([2]) Dans ce cas les fonctions (4) sont dites indépendantes entre elles par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et, d'après le théorème de Jacobi, le déterminant fonctionnel de (4) par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_m$ est différent de zéro.

arbitrairement $a_1, a_2, \ldots, a_m$, considérant $b_1, b_2, \ldots, b_k$ comme inconnues et posant l'équation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; b_1, b_2, \ldots, b_k) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

on peut la rendre identique, indépendamment de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Par conséquent on satisfera à cette équation en posant

$$b_i = \varphi_i(b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_k, a_1, a_2, \ldots, a_m), \quad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

le nombre l étant égal ou inférieur à k; et l'on aura identiquement par supposition

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l, b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_k) \\ = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m). \end{gathered}$$

Dans cette identité les inconnues $b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_k$ restées indéterminées ne figurent pas au second membre : donc elles n'entrent au premier qu'en apparence et on peut les y remplacer par des nombres déterminés $b_{l+1}^0, b_{l+2}^0, \ldots, b_k^0$, d'où, en désignant par $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_l^0$ ce que deviennent $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$,

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_l^0, b_{l+1}^0, b_{l+2}^0, \ldots, b_k^0) \\ = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m), \end{gathered}$$

nouvelle identité qui montre qu'on aura toutes les fonctions particulières comprises dans (1) en donnant à $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_l^0$ toutes les valeurs dont elles sont susceptibles, et pour cela il suffit de laisser arbitraires entre les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$ un nombre $l < m$.

Ainsi, lorsque les constantes de l'expression (1) ne sont pas distinctes, alors on peut déduire toutes les fonctions particulières comprises dans (1) en laissant au moins à l'une des constantes, soit a_i, une valeur particulière choisie arbitrairement.

Par conséquent, donnant dans (1) à a_i deux valeurs particulières in-

finiment voisines a_i^0 et $a_i^0 + da_i$,

(5) $$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i^0, a_{i+1}, \ldots, a_m),$$

(6) $$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i^0 + da_i, a_{i+1}, \ldots, a_m),$$

les deux fonctions trouvées sont équivalentes entre elles, puisque chacune est équivalente à (1).

Réciproquement, si (5) et (6) sont équivalentes entre elles, quelle que soit la valeur particulière a_i^0, alors les constantes dans (1) ne sont pas distinctes.

En effet, donnant dans (1) à a_i une série de valeurs en progression arithmétique de différence da_i, c'est-à-dire toutes les valeurs possibles, on verra de proche en proche que toutes les fonctions obtenues sont équivalentes à (5); donc tout l'ensemble de ces fonctions, c'est-à-dire (1), ne contient aucune fonction particulière qui ne soit comprise dans (5); donc (1) est équivalente à (5) qui a une constante arbitraire de moins, ou, par définition II, les constantes dans (1) ne sont pas distinctes.

Par ce qui précède, la condition nécessaire et suffisante pour que les constantes dans (1) ne soient pas distinctes est que (5) et (6) soient équivalentes entre elles, et pour cela, par définition I, il faut et il suffit qu'en donnant dans (5) aux constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m$ des valeurs particulières quelconques $a_1^0, \ldots, a_{i+1}^0, a_{i-1}^0, \ldots, a_m^0$, le résultat puisse se déduire également de (6) en y assignant à $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m$ des valeurs infiniment peu différentes $a_1^0 + da_1, \ldots, a_{i-1}^0 + da_{i-1}, a_{i+1}^0 + da_{i+1}, \ldots, a_m^0 + da_m$, et l'on doit avoir, indépendamment de $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_n, a_1^0 + da_1, \ldots, a_i^0 + da_i, \ldots, a_m^0 + da_m) \\ = F(x_1, \ldots, x_n, a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0), \end{aligned}$$

se donnant arbitrairement $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0$ et déterminant $da_1, da_2, \ldots, da_m$. Négligeant les puissances des différentielles et supprimant les indices zéro, l'équation précédente devient

(7) $$\frac{dF}{da_1} da_1 + \frac{dF}{da_2} da_2 + \cdots + \frac{dF}{da_m} da_m = 0.$$

Les quantités $da_1, da_2, \ldots, da_m$ sont indépendantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et, sous cette réserve, la possibilité de l'équation (7) est la condition nécessaire et suffisante pour que les constantes de l'expression (1) ne soient pas distinctes. Au contraire, pour que ces constantes soient distinctes, il faut et il suffit que l'équation (7) soit impossible, c'est-à-dire, conformément à l'énoncé, qu'il n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants entre les fonctions (3).

Pour cela, d'après le théorème I du § I, il faut et il suffit qu'au moins l'un des déterminants R_m formés avec les fonctions (3) soit différent de zéro. Faisant, dans l'expression générale du déterminant R_m au § I,

$$A_1 = \frac{dF}{da_1}, \quad A_2 = \frac{dF}{da_2}, \quad \ldots, \quad A_m = \frac{dF}{da_m},$$

on trouve précisément le déterminant fonctionnel du système (4) par rapport aux constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Par ce qui précède, l'un au moins de ces déterminants de R_m doit être différent de zéro et, en vertu de la proposition de Jacobi sur les déterminants fonctionnels, au moins l'un des systèmes de fonctions, tels que (4), sera indépendant par rapport aux constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m$. C. Q. F. D.

Remarque. — La limite supérieure $(m-1)$ que le théorème II assigne à l'ordre des dérivées parmi lesquelles doivent nécessairement se trouver les fonctions indépendantes (4) est une limite précise; en effet, la fonction F peut contenir m constantes distinctes sans que, parmi toutes ses dérivées partielles d'ordres ne surpassant pas $(m-2)$, il se trouve un tel système (4).

Par exemple, dans l'expression

$$F = a_1 e^{x_1} + a_2 e^{x_1}(x_2 - x_1) + a_3 e^{x_2}(x_2 - x_1) + a_4 e^{x_2},$$

les $(m = 4)$ constantes sont distinctes, et cependant, parmi les dérivées de F d'ordres ne surpassant pas $(m - 2 = 2)$, il n'existe aucun sys-

tème (4) de ($m = 4$) fonctions indépendantes. On a en effet

$$F = \frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{dx_2}, \quad \frac{dF}{dx_1} = \frac{d^2F}{dx_1^2} + \frac{d^2F}{dx_1\,dx_2}, \quad \frac{dF}{dx_2} = \frac{d^2F}{dx_2^2} + \frac{d^2F}{dx_1\,dx_2},$$

trois relations entre six fonctions dont quatre ne sauraient être indépendantes.

Sur les problèmes des températures stationnaires, de la torsion et de l'écoulement bien continu, dans les cylindres ou les tuyaux dont la section normale est un rectangle à côtés courbes ou est comprise entre deux lignes fermées;

Par M. J. BOUSSINESQ.

1. Parmi les belles intégrations que Lamé a effectuées, dans des questions de Physique mathématique, au moyen de ses coordonnées curvilignes, la plus étendue, la seule même qui s'applique à des corps d'une infinité de formes différentes, échappant à toute équation finie particulière, est celle qui concerne le problème des températures stationnaires dans les cylindres qui ont pour section normale un rectangle à côtés courbes, et où la température est maintenue constante sur chaque génératrice, mais variable d'une manière quelconque d'une génératrice à l'autre. D'ailleurs, la méthode qu'il y suit s'étend aisément au cas où le contour ne comprend que deux courbes (alors fermées), au lieu de quatre, et à celui où, sur toute l'étendue de quelques-uns des côtés de la section, on se donne arbitrairement, au lieu de la température, le flux de chaleur, constant en chaque point, qui traverse la surface. Lamé montre que ce problème est toujours résoluble, à la seule condition qu'on sache effectuer l'intégration dans le cas simple où deux faces opposées du cylindre sont maintenues à deux températures uniformes sur toute leur étendue et où les deux autres faces (quand elles existent) sont supposées imperméables à la chaleur. En d'autres termes, l'intégration peut s'effectuer, pourvu que

l'on connaisse, dans le plan de la section, une famille de lignes isothermes dont fassent partie deux côtés opposés et qui, s'il s'agit d'un rectangle curviligne, coupent à angle droit les deux autres côtés.

Lamé traite ce problème, à deux coordonnées x, y, en partant de formules fort complexes, établies pour le cas général de trois coordonnées x, y, z, en sorte que les éléments de la solution doivent en être cherchés dans les Ire, IIe, IIIe et XIe de ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes*. M. Émile Mathieu a repris la même question aux Chapitres II et III de son *Cours de Physique mathématique;* il a examiné notamment les cas particuliers déjà étudiés dans les XIe, XIIe et XIIIe des *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, c'est-à-dire les cas des coordonnées elliptiques, bicirculaires et lemniscatiques, et il a éclairci certaines difficultés spéciales auxquelles est parfois sujette leur application, difficultés tenant à l'existence, dans le plan, de régions singulières ou extrêmes (telles que le pôle quand il s'agit de coordonnées polaires) où des discontinuités analytiques peuvent se produire parce qu'une des coordonnées employées cesse d'y être parfaitement déterminée. Mais il a, comme Lamé, déduit les équations dont il se sert de celles qui concernent le cas de trois coordonnées (auxquelles il arrive, il est vrai, par une voie plus rapide).

Je crois donc utile d'exposer ici directement, pour le lecteur étranger à la théorie des coordonnées curvilignes, les principes de la solution générale, déjà contenus sous une certaine forme dans le § CVII des *Leçons* de Lamé (p. 192), et dont MM. William Thomson et Tait ont su tirer un excellent parti au n° 707 de leur *Traité de Philosophie naturelle*. La question en vaut d'autant plus la peine, qu'elle ne concerne pas seulement les températures stationnaires dans des prismes de longueur indéfinie, mais qu'elle embrasse aussi les lois, autrement importantes, de la torsion des mêmes prismes et celles de l'écoulement uniforme bien continu d'un liquide dans des tuyaux droits dont l'intérieur aurait même section que ces prismes; c'est ce que j'ai montré aux §§ IX et X d'une *Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVI, 1871; premier Mémoire: *Des tiges*). Enfin, la même analyse donne encore la solution d'un quatrième problème assez intéressant,

celui du mouvement que prend un liquide sans pesanteur, remplissant un cylindre solide creux auquel on imprime un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle aux génératrices, dans les cas où le frottement intérieur du fluide est négligeable et où les composantes de sa vitesse suivant les axes fixes des coordonnées égalent en chaque point les dérivées partielles correspondantes d'une même fonction φ. Cette question, étudiée en 1843 par M. Stokes, a été rappelée en 1867, dans les n°s 704 et 705 du *Traité de Philosophie naturelle*, par MM. Thomson et Tait, qui ont signalé ses rapports avec le problème de la torsion.

2. Il s'agit de former une fonction u de deux coordonnées rectangulaires x, y, qui satisfasse à l'équation indéfinie

$$(1) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0,$$

dans toute la partie du plan des xy comprise entre deux courbes fermées données ou à l'intérieur d'un rectangle curviligne donné, et qui, sur chaque côté de ce contour, acquière en chaque point des valeurs arbitraires connues ou ait sa dérivée, dans un sens normal au contour, égale à des valeurs connues. On suppose la solution déjà trouvée, pour le cas simple où u se réduit à deux constantes sur deux côtés opposés du contour et où la dérivée de u, dans un sens normal au contour, est nulle tout le long des autres côtés (quand ils existent).

J'appellerai α cette expression particulière de u, fonction connue de x et y. Les courbes (dites *isothermes*) $\alpha =$ const. auront évidemment pour trajectoires orthogonales celles dont l'équation différentielle est $\frac{d\alpha}{dy} dx - \frac{d\alpha}{dx} dy = 0$. Or le premier membre de cette équation est la différentielle exacte d'une certaine fonction β; car, α vérifiant la relation

$$(2) \qquad \frac{d^2 \alpha}{dx^2} + \frac{d^2 \alpha}{dy^2} = 0,$$

la dérivée de $\frac{d\alpha}{dy}$ par rapport à y égale bien celle de $-\frac{d\alpha}{dx}$ par rapport à x. Donc, dans l'équation $\beta =$ const. des trajectoires orthogonales

considérées, le paramètre β satisfait aux deux relations

$$(3) \qquad \frac{d\beta}{dx} = \frac{d\alpha}{dy}, \quad \frac{d\beta}{dy} = -\frac{d\alpha}{dx}.$$

D'ailleurs, si l'on ajoute ces deux relations après les avoir respectivement différentiées en x et en y, on trouve

$$(4) \qquad \frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} = 0;$$

ainsi les lignes $\beta =$ const. sont isothermes, β satisfaisant comme α à l'équation (1). Enfin, le troisième et le quatrième côté du contour (quand il s'agit d'un rectangle curviligne) coïncident avec deux de ces lignes, car ils coupent à angle droit toutes les courbes $\alpha =$ const., à cause de la condition que α y vérifie par hypothèse.

J'admettrai que les lignes de l'une quelconque des deux familles $\alpha =$ const., $\beta =$ const. *divisent l'espace considéré en bandes continues, sans s'y rencontrer nulle part.* Dans ces conditions, chacun des deux paramètres α, β croîtra sans cesse ou décroîtra sans cesse le long d'un chemin normal aux courbes qu'il caractérise.

Pour le démontrer, multiplions, par exemple, l'équation (2) par un élément $dx\,dy = d\sigma$ de l'aire du plan et intégrons le résultat dans toute l'étendue qu'entoure un contour fermé quelconque χ. Chaque terme sera intégrable, et, en appelant $\int_\chi$ une somme prise tout le long du contour, $d\chi$ un élément quelconque de ce contour, λ l'angle fait avec les x positifs par une normale infiniment petite dn menée à $d\chi$ vers le dehors, enfin $\frac{d}{dn}$ une dérivée prise le long de dn, il viendra

$$(5) \qquad \int_\chi \left(\frac{d\alpha}{dx}\cos\lambda + \frac{d\alpha}{dy}\sin\lambda\right) d\chi = 0, \quad \text{ou} \quad \int_\chi \frac{d\alpha}{dn}\, d\chi = 0.$$

Cela posé, prenons pour contour χ le rectangle curviligne que forment deux trajectoires très voisines menées orthogonalement aux courbes $\alpha =$ const. et des éléments correspondants $d\chi_1$, $d\chi_2$ de deux de ces dernières courbes; puis observons que la dérivée $\frac{d\alpha}{dn}$ s'annule

tout le long des deux trajectoires. En désignant par dn_1 une normale à l'élément $d\chi_1$, tirée vers le dedans du rectangle (ou égale à $-dn$), et par dn_2 la normale à $d\chi_2$ menée vers le dehors, c'est-à-dire de même sens que dn_1 pour un observateur qui parcourrait une des deux trajectoires, l'équation (5) deviendra simplement

$$(6) \qquad -\frac{d\alpha}{dn_1}d\chi_1 + \frac{d\alpha}{dn_2}d\chi_2 = 0.$$

Donc les deux valeurs quelconques $\frac{d\alpha}{dn_1}$ et $\frac{d\alpha}{dn_2}$ de la dérivée de α ont le même signe, et α varie toujours dans un même sens le long d'un chemin normal aux courbes $\alpha =$ const. Une remarque analogue s'appliquerait au paramètre β.

Ainsi, la variable α croît graduellement, depuis une certaine valeur α_0 jusqu'à une autre valeur α_1, quand on traverse successivement toutes les courbes $\alpha =$ const. comprises dans l'espace que l'on considère. De même, le paramètre β croît graduellement depuis sa valeur β_0 sur un côté jusqu'à la valeur β_1 qu'il prend sur le côté opposé, s'il s'agit d'un rectangle, ou, dans le cas contraire de l'espace annulaire compris entre deux courbes $\alpha =$ const., depuis la valeur β_0 qu'il a sur une trajectoire orthogonale déterminée de ces courbes jusqu'à la valeur $\beta_0 + \varpi$ qu'il acquiert quand, après un tour complet décrit le long des mêmes courbes, on se trouve revenu sur cette trajectoire. Par suite, tout système de valeurs de α et β, comprises respectivement, soit entre α_0 et α_1, soit entre β_0 et β_1 ou β_0 et $\beta_0 + \varpi$, caractérisera parfaitement un point de l'espace étudié, savoir l'intersection unique des courbes correspondantes $\alpha =$ const., $\beta =$ const., dont chacune n'aura dans cet espace qu'une branche. On pourra donc prendre α et β, à la place de x et de y, comme variables indépendantes. C'est ce que nous allons faire.

3. Voyons d'abord ce que devient l'équation indéfinie (1). Si nous supposons u exprimé en fonction de α et de β, variables qui dépendent elles-mêmes de x et de y, une première différentiation, effectuée par rapport à x, donne

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{du}{d\beta}\frac{d\beta}{dx}.$$

Différentions une fois de plus par rapport à x; il viendra

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{d\alpha^2}\frac{d\alpha^2}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{d\alpha\,d\beta}\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d^2u}{d\beta^2}\frac{d\beta^2}{dx^2} + \frac{du}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{du}{d\beta}\frac{d^2\beta}{dx^2}.$$

On aura pour $\frac{d^2u}{dy^2}$ une valeur analogue, et ces deux valeurs, ajoutées en tenant compte des relations (2), (3) et (4), donneront

$$(8)\qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = \left(\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2}\right)\left(\frac{d\alpha^2}{dx^2} + \frac{d\alpha^2}{dy^2}\right).$$

Comme on ne peut avoir $\frac{d\alpha^2}{dx^2} + \frac{d\alpha^2}{dy^2} = 0$ qu'en des points particuliers tout au plus, et que l'équation (1) doit être vérifiée d'une manière continue, il vient

$$(9)\qquad \frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = 0.$$

L'équation indéfinie conserve donc, dans le système des variables α, β, la forme qu'elle avait dans celui des x, y. Mais les conditions spéciales au contour limite deviennent beaucoup plus simples. D'une part, les équations du contour se réduisent, dans le cas où il s'agit d'une bande comprise entre deux courbes fermées, à $\alpha = \alpha_0$ pour un bord et à $\alpha = \alpha_1$ pour l'autre, et, dans le cas d'un rectangle curviligne, à $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$ pour les quatre côtés respectifs. D'autre part, la dérivée de u le long d'un chemin normal, par exemple, aux courbes $\alpha =$ const. (dérivée proportionnelle aux flux de chaleur de même sens) est en chaque point la somme des produits de

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{du}{d\beta}\frac{d\beta}{dx}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{du}{d\beta}\frac{d\beta}{dy}$$

par les cosinus des angles que fait avec les axes la normale aux courbes, c'est-à-dire par les rapports de $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\alpha}{dy}$ à $\sqrt{\frac{d\alpha^2}{dx^2} + \frac{d\alpha^2}{dy^2}}$, somme égale, vu

les relations (3), à $\frac{du}{d\alpha}\sqrt{\frac{d\alpha^2}{dx^2}+\frac{d\alpha^2}{dy^2}}\cdot$ Dire que cette dérivée équivaut, le long des côtés $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$, à une fonction donnée de x et de y, c'est donc dire qu'on y connaît les valeurs de $\frac{du}{d\alpha}\cdot$ De même, on connaîtra $\frac{du}{d\beta}$ le long des côtés $\beta=\beta_0$, $\beta=\beta_1$ où le flux de chaleur serait donné.

En résumé, les conditions spéciales au contour deviennent

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{(pour } \alpha=\alpha_0 \text{ et pour } \alpha=\alpha_1)\\ u \text{ ou } \dfrac{du}{d\alpha} = \text{des fonctions données de } \beta.\end{array}\right.$$

et, en outre, quand il s'agit d'un rectangle curviligne

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{(pour } \beta=\beta_0 \text{ et pour } \beta=\beta_1),\\ u \text{ ou } \dfrac{du}{d\beta} = \text{des fonctions données de } \alpha.\end{array}\right.$$

Si l'on considère, au contraire, l'espace compris entre deux courbes fermées $\alpha=\alpha_0$, $\alpha=\alpha_1$, les conditions (11) sont remplacées par une seule, consistant en ce que u doit retrouver les mêmes valeurs quand β croît de sa période ϖ, obtenue en faisant un tour complet de l'un des deux bords.

4. Pour satisfaire, dans ce dernier cas, à toutes les conditions énumérées, on compose l'expression générale de u de deux parties distinctes, vérifiant chacune l'équation indéfinie (9). Dans l'une, on satisfait à la condition

$$u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha} = \text{une fonction donnée de } \beta \text{ (pour } \alpha=\alpha_0)$$

et à la condition

$$u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha} = 0 \quad \text{(pour } \alpha=\alpha_1);$$

tandis que, dans l'autre partie, on satisfait à la condition

$$u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha} = 0 \quad (\text{pour } \alpha = \alpha_0)$$

et à la condition

$$u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha} = \text{une fonction donnée de } \beta \quad (\text{pour } \alpha = \alpha_1).$$

La première partie, par exemple, sera de l'une des deux formes doubles

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} u = \sum \left(\frac{e^{m(\alpha_1-\alpha)} \mp e^{-m(\alpha_1-\alpha)}}{e^{m(\alpha_1-\alpha_0)} \mp e^{-m(\alpha_1-\alpha_0)}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{m} \frac{e^{m(\alpha_1-\alpha)} \mp e^{-m(\alpha_1-\alpha)}}{e^{m(\alpha_1-\alpha_0)} \pm e^{-m(\alpha_1-\alpha_0)}} \right) \\ \times [c \sin m(\beta - \beta_0) + c' \cos m(\beta - \beta_0)]. \end{aligned} \right.$$

Si l'on prend la première forme, avec l'un ou l'autre des signes $\mp$, il vient

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\text{pour } \alpha = \alpha_0) \quad u = \Sigma[c \sin m(\beta - \beta_0) + c' \cos m(\beta - \beta_0)], \\ &(\text{pour } \alpha = \alpha_1) \quad u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on prend, au contraire, la seconde forme, on trouve

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\text{pour } \alpha = \alpha_0) \quad -\frac{du}{d\alpha} = \Sigma[c \sin m(\beta - \beta_0) + c' \cos m(\beta - \beta_0)], \\ &(\text{pour } \alpha = \alpha_1) \quad u \text{ ou } \frac{du}{d\alpha} = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, dans les deux cas, l'une des quantités u, $-\frac{du}{d\alpha}$ est, pour $\alpha = \alpha_0$, une fonction donnée de β, fonction périodique, puisqu'elle repasse par les mêmes valeurs quand β croît de ϖ ou après chaque tour complet. Les valeurs de m, ainsi que celles des coefficients c, c', se détermineront donc par la formule, bien connue, qui sert à développer une fonction périodique en série procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples d'un certain arc proportionnel à sa variable.

D'ailleurs, rien n'empêchera, quand la fonction u ne cessera pas d'être partout finie, de supposer de plus en plus grande la courbe qui entoure extérieurement l'espace considéré, de manière que celui-ci comprenne, à la limite, toute la partie du plan située en dehors du bord intérieur. De même, on pourra, si u reste partout fini, concevoir que le bord intérieur se réduise ou se resserre de plus en plus, sans que l'autre bord varie, au point même que l'espace considéré embrasse finalement toute l'étendue mesurable comprise au dedans de la courbe extérieure. Alors cependant la courbe fermée intérieure $\alpha = \alpha_0$, réduite à un simple arc qui revient sur lui-même ou qui n'entoure plus aucune surface, continue à jouer en quelque sorte le rôle d'une paroi tant qu'on y suppose vérifiée la condition spéciale (10) qui la concerne; elle rompt généralement la continuité, en ce sens que u et à plus forte raison ses dérivées peuvent recevoir des valeurs très différentes sur les deux côtés de cette ligne. Il faudrait donc, pour qu'une continuité parfaite existât dans tout l'espace qu'entoure la courbe extérieure, remplacer la condition (10) dont il s'agit, relative à la position limite de la ligne $\alpha = \alpha_0$ et qui équivaut à deux conditions (car elle s'applique séparément sur chaque côté de la courbe intérieure), par deux autres exprimant que, le long de cette courbe limite, u et sa dérivée suivant un sens normal à la courbe ont d'égales valeurs des deux côtés.

Passons actuellement au cas où il y a les quatre faces $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$. Alors on compose la solution de quatre parties, dans chacune desquelles u ou sa dérivée suivant le sens normal au contour s'annulent sur trois côtés et reçoivent, sur le quatrième, les valeurs données. Par exemple, la première partie, destinée à vérifier la condition concernant le côté $\alpha = \alpha_0$, est de l'une des quatre formes doubles

$$(15)\quad \begin{cases} u = \sum \left(\dfrac{e^{m(\alpha_1-\alpha)} \mp e^{-m(\alpha_1-\alpha)}}{e^{m(\alpha_1-\alpha_0)} \mp e^{-m(\alpha_1-\alpha_0)}} \quad \text{ou} \quad \dfrac{1}{m}\, \dfrac{e^{m(\alpha_1-\alpha)} \mp e^{-m(\alpha_1-\alpha)}}{e^{m(\alpha_1-\alpha_0)} \pm e^{-m(\alpha_1-\alpha_0)}} \right) \\ \qquad\qquad \times [c \sin m(\beta-\beta_0) \quad \text{ou} \quad c \cos m(\beta-\beta_0)]. \end{cases}$$

On choisit les facteurs $\sin m(\beta - \beta_0)$ ou les facteurs $\cos m(\beta - \beta_0)$, suivant que c'est u ou $\frac{du}{d\beta}$ qui doit s'annuler pour $\beta = \beta_0$; en outre, on

prend pour m un multiple de $\frac{\pi}{\beta_1 - \beta_0}$ ou un multiple impair de $\frac{\pi}{2(\beta_1 - \beta_0)}$, selon que la condition relative à $\beta = \beta_1$ est pareille ou non à celle qu'on a déjà vérifiée pour $\beta = \beta_0$. Enfin, des séries trigonométriques bien connues permettent de déterminer les coefficients c, de telle manière, que les expressions (15) de u ou celles de $-\frac{du}{d\alpha}$, réduites, pour $\alpha = \alpha_0$ à

$$\Sigma c[\sin m(\beta - \beta_0) \text{ ou } \cos m(\beta - \beta_0)],$$

égalent alors, entre les limites β_0 et β_1, une fonction arbitraire donnée de β.

Sur la transformation des fonctions Θ;

PAR M. DAVID.

Dans le *Journal de Mathématiques* (année 1858), M. Hermite, comprenant les quatre fonctions θ dans une seule formule, a résolu le problème de leur transformation. Toute fonction intermédiaire ([1]) pouvant s'exprimer par l'une des fonctions θ, le problème de cette transformation est complètement résolu, au point de vue théorique du moins. Si je reviens sur ce sujet (et il ne s'agit ici que des fonctions du premier ordre), c'est que, tout en considérant immédiatement la question d'une manière générale, l'on obtient en même temps des formules plus simples et plus symétriques. J'ai d'ailleurs à donner la somme d'une série qui est analogue à celle considérée par Gauss dans son Mémoire sur certaines séries singulières, qui comprend quelquefois cette série, et qui est souvent plus générale; et ces deux questions sont liées dans l'analyse suivante, de telle sorte qu'elles ne peuvent être séparées.

I. Toute fonction intermédiaire du premier ordre pouvant être définie à un facteur constant près par la formule

$$e^{\pi i(az^2+2bz)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']},$$

([1]) Je me sers ici de la dénomination de *fonctions intermédiaires* donnée par MM. Briot et Bouquet (page 236 de la *Théorie des fonctions elliptiques*) à la classe des fonctions dont les quotients expriment les fonctions doublement périodiques.

on trouve pour la transformation du premier degré, c'est-à-dire pour celle dans laquelle, les nouvelles périodes étant désignées par

$$(1)\qquad \Omega = p\omega + q\omega', \quad \Omega' = r\omega + s\omega',$$

on a entre les nombres entiers p, q, r, s la relation

$$(2)\qquad ps - qr = 1;$$

on trouve, dis-je, pour cette transformation l'équation

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\omega}} e^{\pi i(az^2+2bz)} \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']} \\ \qquad = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\Omega}} e^{\pi i\left[Az^2+2Bz-\frac{(b-B)^2}{a-A}\right]} \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']}, \end{cases}$$

que l'on peut écrire d'une manière plus abrégée, et sans réduire la question, en remplaçant $a - A$ par a et $b - B$ par b,

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{a\pi i\left(z+\frac{b}{a}\right)^2} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Omega}} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']}.$$

Cependant nous emploierons de préférence l'équation (3) à cause de la symétrie qu'elle présente et qui doit s'étendre aux formules de la transformation.

Ces formules sont les suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} a - A = \dfrac{q}{\omega\Omega}, \\ c(a-A) + b - B = -\dfrac{pq+2K}{2\Omega}, \\ c - C = -(sr+2H)\dfrac{\Omega}{2} + (pq+2K)\dfrac{\Omega'}{2}, \end{cases}$$

les nombres entiers H et K étant tout à fait arbitraires; ou bien encore

$$(4\ bis)\qquad \begin{cases} a - \mathrm{A} = \dfrac{q}{\omega\Omega}, \\ \mathrm{C}(a - \mathrm{A}) + b - \mathrm{B} = -\dfrac{qs - 2k}{2\omega}, \\ c - \mathrm{C} = -(pr - 2h)\dfrac{\omega}{2} + (sq - 2k)\dfrac{\omega'}{2}. \end{cases}$$

Les premières servent à la transformation du premier membre dans le second; les secondes à la transformation du second membre dans le premier. La symétrie est complète, ainsi qu'on va le voir. Si l'on résoud les équations (1) par rapport à ω et ω', il vient

$$(5)\qquad \omega = s\Omega - q\Omega', \quad \omega' = -r\Omega + p\Omega',$$

et, si on les compare aux équations (1), on voit qu'on passe des unes aux autres par le changement de p, q, r, s en s, $-q$, $-r$, p. Si l'on désigne en outre par k et h les nombres entiers analogues à K et H, on passera de l'une des transformations à l'autre par le changement des quantités

$$\omega,\ \omega',\ p,\ q,\ r,\ s,\ a,\ b,\ c,\ h,\ k,$$

dans les quantités

$$\Omega,\ \Omega',\ s,\ -q,\ -r,\ p,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{H},\ \mathrm{K}.$$

Il est clair d'ailleurs que les formules (4) et (4 *bis*) doivent être identiques; il en résulte les relations

$$(6)\qquad \begin{cases} p(sr + 2\mathrm{H}) - r(pq + 2\mathrm{K}) = pr - 2h, \\ q(sr + 2\mathrm{H}) - s(pq + 2\mathrm{K}) = -sq + 2k, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6\ bis)\qquad \begin{cases} sr + 2\mathrm{H} = s(pr - 2h) + r(sq - 2k), \\ pq + 2\mathrm{K} = q(pr - 2h) + p(sq - 2k). \end{cases}$$

L'introduction des nombres h, k, H, K présente cet avantage, qu'on peut toujours en disposer pour que les quantités c et C soient comprises dans les parallélogrammes (ω, ω') et (Ω, Ω').

Quant à la quantité ε, il y a plusieurs cas à distinguer.

1° La partie imaginaire de $\frac{q}{\omega\Omega}$ étant positive,

$$(7)\quad \begin{cases} q \text{ impair}, & \varepsilon = e^{-Ks\left(r-p-\frac{K}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{q\pi i}{4}} \left(\frac{p}{q}\right), \\ q = 2^{2n-1}\beta, & \varepsilon = e^{-Ks\left(r-p-\frac{K}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[pq+\frac{3(p\beta+1)^2+(\beta+1)^2}{2}\right]} \left(\frac{p}{\beta}\right), \\ q = 2^{2n}\beta, & \varepsilon = e^{-Ks\left(r-p-\frac{K}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[pq+\frac{3(p\beta+1)^2+(\beta+1)^2+p^2-1}{2}\right]} \left(\frac{p}{\beta}\right). \end{cases}$$

2° La portion imaginaire de $\frac{q}{\omega\Omega}$ étant négative,

$$(8)\quad \begin{cases} q \text{ impair}, & \varepsilon = e^{-kp\left(r+s-\frac{k}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{q\pi i}{4}} \left(\frac{p}{q}\right), \\ q = 2^{2n-1}\beta, & \varepsilon = e^{-kp\left(r+s-\frac{k}{q}\right)\pi i}\, e^{-\frac{\pi i}{4}\left[-sq+\frac{3(s\beta-1)^2+(\beta-1)^2}{2}\right]} \left(\frac{p}{\beta}\right), \\ q = 2^{2n}\beta, & \varepsilon = e^{-kp\left(r+s-\frac{k}{q}\right)\pi i}\, e^{-\frac{\pi i}{4}\left[-sq+\frac{3(s\beta-1)^2+(\beta-1)^2+s^2-1}{2}\right]} \left(\frac{p}{\beta}\right). \end{cases}$$

Le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ est celui de la théorie des résidus quadratiques étendu au cas où les nombres p et q sont composés et premiers entre eux, q étant impair, et les deux termes du symbole pouvant être positifs ou négatifs. Toutefois il y a lieu de remarquer que, s'ils sont tous deux négatifs, la loi de réciprocité n'est plus applicable; mais il est toujours facile de transformer le symbole en un autre dans lequel un des termes seulement serait négatif, ou mieux encore en un autre dont les deux termes seraient positifs.

On a encore la transformation du premier degré avec la relation

$$(9)\qquad ps - qr = -1.$$

Alors, au lieu de l'équation (3), il vient l'équation

$$(3\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\omega}}e^{\pi i(az^2+2bz)}\sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']}\\&=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Omega}}e^{\pi i\left[Az^2+2Bz-\frac{(b-B)^2}{a-A}\right]}\sum e^{-\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']},\end{aligned}\right.$$

et il faut, dans les formules (4), (4 *bis*), (6), (6 *bis*), (7), (8), changer r, s, Ω' en $-r$, $-s$, $-\Omega'$.

Le cas de $ps-qr=1$ correspond aux fonctions θ et le cas de $ps-qr=-1$ correspond aux fonctions ϑ de Jacobi.

Les formules précédentes donnent la somme de la série

$$(10)\qquad U=\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1}e^{\rho\left(p+\frac{2K}{q}\right)\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q}},$$

au moyen de la formule

$$(11)\qquad U=\sqrt{iq}\,\varepsilon,$$

la quantité ε étant déterminée par les formules (7), dans lesquelles on change K en $-K$ et q en $-q$, les nombres r et s étant une des solutions de l'équation $ps-qr=1$, et les nombres donnés p et q étant premiers entre eux. Si l'on représente la série (10) par la formule

$$(12)\qquad U=\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1}e^{(\rho m+\rho^2 p)\frac{\pi i}{q}},$$

on dira que la somme est donnée par la formule (11) quand, p et q étant premiers entre eux, les nombres m et pq sont de même parité.

Lorsqu'on fait $K=0$, on a la série

$$(13)\qquad U=\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1}e^{\rho p\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q}},$$

dont la somme a été donnée par M. Hermite, dans le Mémoire cité,

sans démonstration. Lorsqu'on y suppose p pair, cette série se confond avec celle de Gauss

$$(14) \qquad U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho^2 \frac{2h\pi i}{q}},$$

où l'on suppose h et q premiers entre eux (attendu que, si ces nombres ont un plus grand commun diviseur, ce cas se ramène immédiatement à celui dont il est question). Elle ne comprend une série nouvelle que dans le cas de p impair; on peut l'écrire alors

$$(15) \qquad U = 1 - e^{\frac{q\pi i}{q}} + e^{2^2 \frac{p\pi i}{q}} - \ldots \pm e^{(q-1)^2 \frac{p\pi i}{q}},$$

le signe $+$ étant relatif au cas de q impair, et le signe $-$ au cas de q pair. Lorsque dans la série (10) on suppose p pair, il faut, d'après les conditions énoncées, supposer q impair, tandis que cette condition n'est point nécessaire pour la série (13). A ce point de vue, la série (10) ne comprend donc pas complètement la série de M. Hermite et par suite celle de Gauss. Lorsque p est impair, la série (10) ou, ce qui revient au même, la série (12), comprend bien la série (15) considérée par M. Hermite; mais, les nombres m et pq n'étant pas nécessairement de même parité, on ne peut pas toujours employer la solution de la formule (11).

Dans le *Journal de Mathématiques* (t. XII), Lebesgue a introduit une nouvelle série de ce genre

$$(16) \qquad U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2h\pi i}{q}},$$

dans laquelle il suppose h et q premiers entre eux. Ce n'est un cas particulier de la série (10) que lorsque p est pair ou q impair.

D'ailleurs les séries de Lebesgue ou de M. Hermite se déduisent avec facilité de la série de Gauss. Je détermine les unes et les autres par des formules analogues à celles que M. Hermite a employées pour exprimer la série (13). (Voir § V.)

La série nouvelle que j'examine est donc à la fois plus et moins

générale que celles dont il vient d'être question. Mais elle ne s'y ramène que par une marche bien différente et qui est liée étroitement à la transformation du premier degré des fonctions intermédiaires du premier ordre. Elle échappe à cette analyse quand les nombres m et pq de la formule (12) ne sont pas de même parité; il semble que la solution dépend alors de la transformation de degré supérieur. Si cette restriction, que les nombres m et pq doivent être de même parité, pouvait être écartée, la série (10) comprendrait toutes les séries examinées antérieurement.

Je passe à la démonstration des différentes formules ci-dessus.

II. Une fonction intermédiaire, ayant été représentée, abstraction faite d'un facteur constant, par la formule

$$(17)\qquad f(z) = e^{\pi i (az^2+2bz)} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\Omega]},$$

peut aussi être représentée d'une manière analogue en se servant d'autres périodes déterminées par les équations (1) et (2); et elle s'exprime alors, toujours abstraction faite du facteur constant, par

$$(18)\qquad f(z) = e^{\pi i(Az^2+2Bz)} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C)+m^2\Omega']}.$$

Il est facile en effet de voir que la partie imaginaire du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ étant positive, ce qui est la condition pour que la première série soit convergente, la partie imaginaire du rapport $\frac{\Omega'}{\Omega}$ est aussi positive si $ps - qr = 1$, ce qui rend la deuxième série aussi convergente. C'est le contraire qui a lieu, si $ps - qr = -1$; et c'est pour cela que dans l'équation (3 *bis*) le rapport $\frac{\Omega'}{\Omega}$ est remplacé par le rapport $-\frac{\Omega'}{\Omega}$. Sous le bénéfice de cette observation et des indications données au § I, nous n'aurons pas à revenir sur la transformation relative au cas de $ps - qr = -1$.

La première question à résoudre est de trouver des relations entre les constantes a, b, c et A, B, C, pour que les deux formules (17) et (18) soient identiques, abstraction faite du facteur constant.

On sait que toute fonction intermédiaire satisfait à des relations telles que

$$f(z+\omega) = e^{az+b} f(z),$$
$$f(z+\omega') = e^{a'z+b'} f(z),$$

pourvu qu'on ait entre les quantités a et a' la relation

$$a\omega' - a'\omega = 2n\pi i,$$

n étant un nombre entier désignant l'ordre de la fonction. Dans le cas actuel, la fonction est du premier ordre, et l'on a $n=1$. Il s'agit de former ces relations pour les formules (17) et (18)

En remplaçant, dans la formule (17), r par $r+\Omega$, elle devient

$$f(z+\Omega) = e^{\pi i[a(z+\Omega)^2 + 2b(z+\Omega)]} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+2mp\omega+2mq\omega'+m^2\omega']}.$$

On peut, dans la quantité sous le signe Σ qui a pour facteur $\frac{\pi i}{\omega}$, faire abstraction de $2mp\omega$; car, quel que soit m, on a $e^{2m\pi i}=1$. Cette expression peut ensuite s'écrire

$$2(m+q)(z-c) + (m+q)^2\omega' - 2q(z-c) - q^2\omega'.$$

Pour former la série, il faut donner à m toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; on obtient évidemment le même résultat en donnant ces valeurs entières à $m+q$. Le Σ de la formule précédente peut donc être remplacé par

$$e^{-\frac{\pi i}{\omega}[2q(z-c)+q^2\omega']} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']}.$$

On en conclut que la fonction $f(z)$ satisfait à la relation

$$f(z+\Omega) = e^{\pi i\left[2\left(a\Omega-\frac{q}{\omega}\right)z + a\Omega^2 + 2b\Omega - q^2\frac{\omega'}{\omega} + 2q\frac{c}{\omega}\right]} f(z),$$

qui est relative à la période Ω. Elle satisfait de même à la relation

$$f(z+\Omega') = e^{\pi i\left[2\left(a\Omega'-\frac{s}{\omega}\right)z + a\Omega'^2 + 2b\Omega' - s^2\frac{\omega'}{\omega} + 2s\frac{c}{\omega}\right]} f(z),$$

qui est relative à la période Ω'.

On trouve plus facilement encore les deux relations relatives à la formule (18),

$$f(z+\Omega) = e^{\pi i(2\mathrm{A}\Omega z + \mathrm{A}\Omega^2 + 2\mathrm{B}\Omega)} f(z),$$

$$f(z+\Omega') = e^{\pi i\left[2\left(\mathrm{A}\Omega' - \frac{1}{\Omega}\right)z + \mathrm{A}\Omega'^2 - \frac{\Omega'}{\Omega} + 2\mathrm{B}\Omega' + 2\frac{\mathrm{C}}{\Omega}\right]} f(z).$$

La comparaison des relations précédentes conduit aux équations suivantes, qui, en y ajoutant les équations (5), vont servir à la détermination des quantités A, B, C :

(19) $$\mathrm{A}\Omega = a\Omega - \frac{q}{\omega},$$

(20) $$\mathrm{A}\Omega' - \frac{1}{\Omega} = a\Omega' - \frac{s}{\omega},$$

(21) $$\mathrm{A}\Omega^2 + 2\mathrm{B}\Omega = a\Omega^2 + 2b\Omega - q^2\frac{\omega'}{\omega} + 2q\frac{c}{\omega} + 2\mathrm{K},$$

(22) $$\mathrm{A}\Omega'^2 - \frac{\Omega'}{\Omega} + 2\mathrm{B}\Omega' + 2\frac{\mathrm{C}}{\Omega} = a\Omega'^2 + 2b\Omega' - s^2\frac{\omega'}{\omega} + 2s\frac{c}{\omega} + 2\mathrm{H}.$$

Il y a quatre équations et trois inconnues; les relations (5) mettent de suite en évidence l'identité des équations (19) et (20).

Substituant la valeur de A tirée de l'équation (19) dans l'équation (21), puis cette même valeur de A tirée de l'équation (20) dans l'équation (22), les trois équations sont remplacées par

(4) $$a - \mathrm{A} = \frac{q}{\omega\Omega},$$

$$-\frac{q\Omega}{\omega} + 2\mathrm{B}\Omega = 2b\Omega - q^2\frac{\omega'}{\omega} + 2q\frac{c}{\omega} + 2\mathrm{K},$$

$$-\frac{s\Omega'}{\omega} + 2\mathrm{B}\Omega' + 2\frac{\mathrm{C}}{\Omega} = 2b\Omega' - s^2\frac{\omega'}{\omega} + 2s\frac{\mathrm{C}}{\Omega} + 2\mathrm{H}.$$

Les deux dernières deviennent ensuite, par des transformations faciles,

(4) $$c(a-\mathrm{A}) + b - \mathrm{B} = -\frac{qp + 2\mathrm{K}}{2\Omega},$$

$$2(b-\mathrm{B})\Omega' = -sr + 2\frac{\mathrm{C}}{\Omega} - 2s\frac{c}{\omega} - 2\mathrm{H}.$$

En substituant dans cette dernière la valeur de c déduite de la précédente, on a

$$C(a - A) + b - B = \frac{q(sr + 2H) - s(pq + 2K)}{2\omega};$$

puis, retranchant celle-ci de la dernière des équations numérotées (4),

$$(4) \qquad c - C = -(sr + 2H)\frac{\Omega}{2} + (pq + 2K)\frac{\Omega'}{2}.$$

Les trois équations précédentes, qui portent le n° (4), sont celles de même numéro du § I.

Quant aux équations (4 *bis*), (6) et (6 *bis*), il semble que ce que l'on a déjà dit au § I suffit. Mais leur forme pourrait faire croire que les nombres h et k ou bien H et K qu'elles déterminent peuvent ne pas être entiers, ce qui serait un résultat absurde. Il est facile de voir, en écrivant

$$-2h = 2pH - 2rK + pr(s - q - 1),$$
$$-2k = -2qH + 2sK + sq(p - r - 1),$$

que les nombres entiers $pr(s - q - 1)$ et $qs(p - r - 1)$ sont toujours divisibles par 2, et qu'il en est par suite de même des premiers membres de ces équations. En effet, d'après la relation $ps - qr = 1$, on ne peut faire que les six suppositions suivantes :

p pair........................	s, q, r impairs,
s pair........................	p, q, r impairs,
p, s pairs........................	q, r impairs,
q pair........................	p, s, r impairs,
r pair........................	p, s, q impairs,
q, r pairs........................	p, s impairs,

et dans tous les cas les nombres dont il s'agit sont pairs.

III. Si l'on rétablit maintenant le facteur constant dont il a été fait abstraction, il faut, pour achever de résoudre le problème, le déterminer de manière que l'équation

$$e^{\pi i(az^2+2bz)}\sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']} = \mathrm{T}e^{\pi i(\mathrm{A}z^2+2\mathrm{B}z)}\sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-\mathrm{C})+m^2\Omega']}$$

soit identique. L'idée qui se présente immédiatement est de faire $z = 0$, et il vient

$$\mathrm{T} = \frac{\sum e^{\frac{\pi i}{\omega}(-2mc + m^2\omega')}}{\sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}(-2m\mathrm{C} + m^2\Omega')}} = \frac{\theta_3(-c, \omega, \omega')}{\theta_3(-\mathrm{C}, \Omega, \Omega')}.$$

Mais, si cette solution se présente immédiatement, elle n'est pas la plus simple.

M. Hermite détermine cette constante par l'analyse remarquable qui suit, et qu'il est indispensable de répéter, soit à cause des différences de notations, soit à cause du point de vue plus général où nous nous sommes placés, soit enfin à cause de quelques détails. Il y a deux cas à distinguer, selon que la partie imaginaire de $\frac{q}{\omega\Omega}$ ou de $a - \mathrm{A}$, ce qui est la même chose, est positive ou négative. Nous considérons le premier cas.

Après avoir divisé l'équation ci-dessus par le facteur $e^{\pi i(\mathrm{A}z^2 + \mathrm{B}z)}$, nous posons

$$(23) \qquad \varphi(z, m) = (a - \mathrm{A})z^2 + 2\left(b - \mathrm{B} + \frac{m}{\omega}\right)z - \frac{2mc}{\omega} + m^2\frac{\omega'}{\omega},$$

et elle devient

$$(24) \qquad \sum e^{\pi i \varphi(z,m)} = \mathrm{T}\sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-\mathrm{C}) + m^2\Omega']}.$$

Il est facile d'établir la relation

$$(25) \qquad \varphi(z + n\Omega, m) \equiv \varphi(z, m + nq) \pmod{2}.$$

En changeant dans (23) z en $z + \Omega$ et m en $m + q$, on a les deux relations

$$\begin{aligned}\varphi(z + \Omega, m) = {} & (a - \mathrm{A})(z + \Omega)^2 \\ & + 2\left(b - \mathrm{B} + \frac{m}{\omega}\right)(z + \Omega) - \frac{2mc}{\omega} + m^2\frac{\omega'}{\omega}, \\ \varphi(z, m + q) = {} & (a - \mathrm{A})z^2 \\ & + 2\left(b - \mathrm{B} + \frac{m + q}{\omega}\right)z - \frac{2(m + q)c}{\omega} + (m + q)^2\frac{\omega'}{\omega};\end{aligned}$$

en les retranchant l'une de l'autre et faisant quelques réductions, il vient

$$\varphi(z+\Omega, m) - \varphi(z, m+q) = 2\mathrm{K} + 2mp.$$

On passe facilement de là à la relation qu'il s'agit de démontrer.

Cela posé, après l'avoir multipliée par dz, intégrons les deux membres de l'équation (24) suivant la ligne droite qui va de zéro à Ω. En ce qui concerne le second membre, l'intégration d'un terme quelconque donne

$$\int_0^\Omega e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-\mathrm{C})+m^2\Omega']}\,dz = \frac{\Omega}{2m\pi i}\,e^{\frac{\pi i}{\Omega}[-2m\mathrm{C}+m^2\Omega']}(e^{2m\pi i}-1),$$

et l'on voit ainsi que chacun de ces termes est nul, sauf le cas où m est égal à zéro. Quant à ce terme que l'on obtient en faisant $m=0$, son intégrale est égale à Ω. L'équation (24) conduit ainsi à

$$\mathrm{T}\Omega = \int_0^\Omega dz \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\pi i \varphi(z,m)}. \tag{26}$$

Si q est positif, à la place de celle-ci on peut écrire

$$\mathrm{T}\Omega = \int_0^\Omega dz \left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,nq)} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,nq+1)} + \ldots + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,nq+q-1)}\right],$$

et à cause de la relation (25)

$$\mathrm{T}\Omega = \int_0^\Omega dz \left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z+n\Omega,0)} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z+n\Omega,1)} + \ldots + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z+n\Omega,q-1)}\right]. \tag{27}$$

Mais, si q est négatif, en remplaçant q par $-q$, cette relation (25) devient

$$\varphi(z, m-nq) \equiv \varphi(z+n\Omega, m) \pmod{2},$$

et à la place de (26) il faut écrire

$$\mathrm{T}\Omega = \int_0^\Omega dz \left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,-nq)} + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,-nq+1)} + \ldots + \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\pi i\varphi(z,-nq+q-1)}\right];$$

d'où résulte encore la formule (27). Dans les deux cas on peut donc poser

$$(28)\qquad \mathrm{T}\Omega = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_0^{\Omega} e^{\pi i \varphi(z+n\Omega,\rho)}\, dz,$$

pourvu que dans la limite supérieure du premier Σ l'on ait soin de prendre q avec sa valeur absolue.

Posons actuellement $z + n\Omega = y$, il vient

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_0^{\Omega} e^{\pi i \varphi(z+n\Omega,\rho)}\, dz = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int_{n\Omega}^{(n+1)\Omega} e^{\pi i \varphi(y,\rho)}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \varphi(y,\rho)}\, dy;$$

et enfin

$$(29)\qquad \mathrm{T}\Omega = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \int_0^{\Omega} e^{\pi i \varphi(z,\rho)}\, dz.$$

L'intégrale qui entre dans cette formule a la forme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\, dx,$$

et est égale à $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-c+\frac{b^2}{4a}}$, même dans le cas où les constantes sont imaginaires, pourvu que la partie réelle de a soit positive, ainsi que l'a démontré Cauchy (*Exercices de Mathématiques*, t. II). Dans le cas actuel, pour comparer plus facilement à la formule que nous venons de trouver, nous écrirons

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i (mz^2+nz+p)}\, dz = \frac{e^{\pi i\left(p-\frac{n^2}{4m}\right)}}{\sqrt{-mi}},$$

la partie réelle de $-m\pi i$ étant positive. Or, d'après (23), on a $m = a - \mathrm{A}$, et nous considérons le cas où la partie imaginaire de $a - \mathrm{A}$ est positive; par conséquent, la formule ci-dessus est applicable.

En remplaçant m par ρ dans la formule (23), on a

$$p - \frac{n^2}{4m} = -\frac{2\rho c}{\omega} + \rho^2\frac{\omega'}{\omega} - \frac{\left(b - \mathrm{B} + \frac{\rho}{\omega}\right)^2}{a - \mathrm{A}}.$$

qui se réduit, en tenant compte des diverses formules relatives à la transformation, à

$$p - \frac{n^2}{4m} = -\frac{(b - \mathrm{B})^2}{a - \mathrm{A}} + \rho\left(p + \frac{2\mathrm{K}}{q}\right) - \rho^2\frac{\mathrm{P}}{q}.$$

La formule (29) devient donc, tous calculs faits,

$$\mathrm{T} = \frac{e^{-\pi i\frac{(b-\mathrm{B})^2}{a-\mathrm{A}}}}{\sqrt{-iq\frac{\Omega}{\omega}}}\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho\left(p+\frac{2\mathrm{K}}{q}\right)\pi i - \rho^2\frac{\mathrm{P}\pi i}{q}},$$

pourvu que, dans le cas de q négatif, on convienne de prendre, dans la limite supérieure du Σ, q avec sa valeur absolue. De là on passe immédiatement à l'équation (3) du § I,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\omega}}e^{\pi i(az^2+2bz)}\sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']}\\ &\quad = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\Omega}}e^{\pi i\left[\mathrm{A}z^2+2\mathrm{B}z-\frac{(b-\mathrm{B})^2}{a-\mathrm{A}}\right]}\sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-\mathrm{C})+m^2\Omega']},\end{aligned}\right.$$

en posant

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{-iq}}\mathrm{U},$$

$$\mathrm{U} = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho\left(p+\frac{2\mathrm{K}}{q}\right)\pi i - \rho^2\frac{\mathrm{P}\pi i}{q}}.$$

C'est, sauf la convention relative au cas où q est négatif, la série (10) du § I. On va voir qu'elle se ramène à la série de M. Hermite.

IV. Le nombre K que nous avons introduit dans cette analyse est arbitraire, ainsi que le nombre H. On a une transformation particu-

lière en faisant $K = 0$ et $H = 0$. Désignons par B', C', ε' ce que deviennent les quantités B, C, ε qui sont les seules qui changent avec les valeurs de H et K; la transformation correspondante est donnée par les formules

$$a - A = \frac{q}{\omega\Omega},$$

$$c - C' = -sr\frac{\Omega}{2} + pq\frac{\Omega'}{2},$$

$$c(a - A) + b - B' = -\frac{pq}{2\Omega},$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{-iq}} \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho p\pi i - \rho^2 \frac{p\pi i}{q}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{\pi i(az^2+2bz)} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c)+m^2\omega']} = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\Omega}} e^{\pi i\left[Az^2+2B'z-\frac{(b-B')^2}{a-A}\right]} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C')+m^2\Omega']}.$$

Quand H et K ne sont pas nuls, les formules de transformation sont les formules (3) et (4) du § I auxquelles il faut ajouter

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{-iq}} \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho\left(p+\frac{2K}{q}\right)\pi i - \rho^2\frac{p\pi i}{q}}.$$

Or, en comparant ces formules aux précédentes, on a

$$B' = B - \frac{K}{\Omega}, \quad C' = C - H\Omega + K\Omega';$$

d'où il résulte, en substituant et désignant, pour abréger, par $f(z)$ le premier membre de l'équation (3), qui est en même temps le premier membre de l'équation ci-dessus,

$$f(z) = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\Omega}} e^{\pi i\left[Az^2+2\left(B-\frac{K}{\Omega}\right)z-\frac{\left(b-B+\frac{K}{\Omega}\right)^2}{a-A}\right]} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}[2m(z-C+H\Omega-K\Omega')+m^2\Omega']}.$$

Par une transformation facile et analogue à celle qui a été employée pour les formules (17) et (18), cette équation peut être remplacée par

la suivante

$$f(z)=\frac{\varepsilon'}{\sqrt{\Omega}}e^{\pi i\left[\mathrm{A}z^2+2\mathrm{B}z-\frac{(b-\mathrm{B})^2}{a-\mathrm{A}}\right]}e^{-\mathrm{K}\pi i\left[2\frac{b-\mathrm{B}}{(a-\mathrm{A})\Omega}+\frac{\mathrm{K}}{(a-\mathrm{A})\Omega^2}+\frac{2\mathrm{C}}{\Omega}+\mathrm{K}\frac{\Omega'}{\Omega}\right]}\sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}(2mz-\mathrm{C}+m^2\Omega')}.$$

En comparant à l'équation (3), on en déduit, après avoir remplacé ε et ε' par leurs valeurs,

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1}e^{\rho\left(p+\frac{2\mathrm{K}}{q}\right)\pi i-\rho^2\frac{p\pi i}{q}}=e^{-\mathrm{K}\pi i\left[\frac{2(b-\mathrm{B})}{(a-\mathrm{A})\Omega}+\frac{\mathrm{K}}{(a-\mathrm{A})\Omega^2}+\frac{2\mathrm{C}}{\Omega}+\mathrm{K}\frac{\Omega'}{\Omega}\right]}\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1}e^{\rho p\pi i-\rho^2\frac{p\pi i}{q}}.$$

Le premier membre ne contenant que les nombres entiers p, q, K, il est clair que le facteur exponentiel du second membre ne peut contenir que ces nombres ou des nombres qui en dépendent. C'est ce qui se vérifie facilement au moyen des formules (4) et (4 *bis*); et il en résulte

$$(30)\qquad \sum_{\rho=0}^{\rho q=-1}e^{\rho\left(p+\frac{2\mathrm{K}}{q}\right)\pi i-\rho^2\frac{p\pi i}{q}}=e^{-\mathrm{K}s\left(r-p-\frac{\mathrm{K}}{q}\right)\pi i}\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1}e^{\rho p\pi i-\rho^2\frac{p\pi i}{q}}.$$

La série du premier membre, qui est la série (10), est ainsi exprimée par celle du second membre, qui est celle de M. Hermite. Quant aux nombres r et s introduits dans le second membre, ils sont toujours liés à ceux du premier membre par l'équation $ps-qr=1$; et il est facile de voir, ce qui doit être, qu'une solution quelconque de cette équation ne change pas ce second membre. Seulement il faut remarquer que dans la nouvelle série les nombres p et q sont premiers entre eux, tandis que dans la série de M. Hermite considérée en elle-même, indépendamment de la question actuelle, il n'en est pas de même.

Il reste à évaluer cette dernière série.

V. Nous rappelons d'abord les formules suivantes données par Lebesgue dans le Mémoire cité, pour exprimer la série de Gauss :

$$\mathrm{V}=\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1}e^{\rho^2\frac{2h\pi i}{q}},$$

en supposant h et q premiers entre eux,

$$
(31)\quad \begin{cases}
q \text{ impair}, & V = e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2}\left(\dfrac{h}{q}\right)\sqrt{q}, \\
q = 2\beta, & V = 0, \\
q = 2^{2n}\beta, & V = \left[1 + (-1)^{\frac{h\beta-1}{2}} i\right] i^{\left(\frac{\beta-1}{2}\right)^2}\left(\dfrac{h}{\beta}\right)\sqrt{q}, \\
q = 2^{2n+1}\beta, & V = \left[1 + (-1)^{\frac{h\beta-1}{2}} i\right] i^{\left(\frac{\beta-1}{2}\right)^2}\left(\dfrac{h}{\beta}\right)\sqrt{q}.
\end{cases}
$$

Pour retrouver les formules de M. Hermite, il faut leur donner une autre forme.

En considérant le facteur

$$1 + (-1)^{\frac{h\beta-1}{2}} i = 1 + e^{\frac{h\beta\pi i}{2}},$$

l'élevant au carré, puis faisant l'opération inverse, on trouve

$$1 + e^{\frac{h\beta\pi i}{2}} = \pm\sqrt{2}e^{\frac{h\beta\pi i}{4}} = \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{h\beta}{4} + i\sin\frac{h\beta}{4}\right).$$

Si $h\beta \equiv \pm 1 \pmod{8}$, on a

$$\cos\frac{h\beta}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

si $h\beta \equiv \pm 3 \pmod{8}$, on a

$$\cos\frac{h\beta}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il en résulte que dans le premier cas

$$1 + e^{\frac{h\beta\pi i}{2}} = \sqrt{2}e^{\frac{h\beta\pi i}{4}},$$

et dans le second

$$1 + e^{\frac{h\beta\pi i}{2}} = -\sqrt{2}e^{\frac{h\beta\pi i}{4}}.$$

Or il est facile de vérifier que dans le premier cas on a la congruence

$$h\beta - 1 \equiv \frac{3(h\beta-1)^2}{2} \pmod{8},$$

tandis que dans le second cas on a la congruence

$$h\beta - 1 \equiv \frac{3(h\beta - 1)^2}{2} \pmod{4},$$

sans que la première congruence soit satisfaite. On a donc dans les deux cas

$$(32) \qquad 1 + e^{\frac{h\beta\pi i}{2}} = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{3(h\beta-1)^2}{2}\right]},$$

et les formules (31) deviennent

$$(33) \quad \begin{cases} q \text{ impair}, & V = e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2}\left(\frac{h}{q}\right)\sqrt{q}, \\ q = 2\beta, & V = 0, \\ q = 2^{2n}\beta, & V = e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{3(h\beta-1)^2 + (\beta-1)^2}{2}\right]}\left(\frac{h}{\beta}\right)\sqrt{2q}, \\ q = 2^{2n+1}\beta, & V = e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{3(h\beta-1)^2 + (\beta-1)^2 + q^2 - 1}{2}\right]}\left(\frac{h}{\beta}\right)\sqrt{2q}. \end{cases}$$

Si h et q n'étaient pas premiers entre eux, on poserait, en appelant d leur plus grand commun diviseur,

$$h = dh', \quad q = dq',$$

et l'on aurait

$$V = d\sum_{\rho=0}^{\rho=q'-1} e^{\rho^2\frac{2h'\pi i}{q'}},$$

ce qui ramènerait aux formules précédentes.

Celles-ci conduisent à exprimer la série de Lebesgue

$$T = e\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2}\frac{2h\pi i}{q}}$$

par les formules suivantes :

$$(34) \quad \begin{cases} q \text{ pair}, & T = 0, \\ q \text{ impair}, & \begin{cases} h \text{ impair}, & T = e^{-\frac{h\pi i}{4q}} e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{3(hq-1)^2 + (q-1)^2 + h^2 - 1}{2}\right]}\left(\frac{h}{q}\right)\sqrt{q}, \\ h \text{ pair}, & T = e^{-\frac{h\pi i}{4q}} e^{\frac{\pi i}{4}(hq-q+1)}\left(\frac{h}{q}\right)\sqrt{q}; \end{cases} \end{cases}$$

h et q sont encore premiers entre eux, et s'ils ne l'étaient pas, en désignant par d leur plus grand commun diviseur, on aurait comme précédemment

$$\mathrm{T} = d \sum_{\rho=0}^{\rho=q'-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2}\frac{2h'\pi i}{q'}}.$$

Soit d'abord q pair, et posons $q = 2^\alpha\beta$, β étant impair. En considérant dans la série des termes à égale distance des extrêmes, savoir

$$e^{\frac{\rho^2+\rho}{2}\frac{2h\pi i}{2^\alpha\beta}}, \quad e^{\frac{(2^\alpha\beta-\rho-1)^2+2^\alpha\beta-\rho-1}{2}\frac{2h\pi i}{2^\alpha\beta}},$$

on voit que ces deux termes sont égaux et de signe contraire. D'où $\mathrm{T} = 0$; c'est la première des formules (34).

Soit q impair; on peut supposer h pair ou impair. Considérons en premier lieu le cas de h impair. On démontre facilement la formule

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=8q-1} e^{\rho^2\frac{2h\pi i}{8q}} = \sum_{\rho=0}^{\rho=4q-1} e^{\rho^2\frac{2h\pi i}{4q}} + e^{\frac{h\pi i}{4q}} \sum_{\rho=0}^{\rho=4q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2}\frac{2h\pi i}{q}},$$

en divisant la somme du premier membre en deux autres, dont l'une correspond aux valeurs paires de ρ et l'autre aux valeurs impaires. La seconde partie du second membre peut ensuite être partagée comme il suit :

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=2q-1} e^{\rho^2\frac{2h\pi i}{2q}} + \sum_{\rho=0}^{\rho=2q-1} e^{(\rho+2q)^2\frac{2h\pi i}{2q}},$$

et, en développant $(\rho+2q)^2 = \rho^2 + 4q\rho + 4q^2$, on s'aperçoit que ces deux sommes sont égales et par suite nulles, puisque la première est nulle en vertu de la seconde des formules (33). La seconde partie du second membre se partage de même en quatre sommes que l'on reconnaît être égales entre elles, et l'on a, par suite, la formule réduite

$$4e^{\frac{h\pi i}{4q}}\mathrm{T} = \sum_{\rho=0}^{\rho=8q-1} e^{\rho^2\frac{2h\pi i}{8q}};$$

d'où, en employant la quatrième des formules (33), on déduit la seconde des formules (34).

Lorsque h est pair, on peut poser $h = 2^\alpha p$. On emploie la formule

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=4q-1} e^{\rho^2 \frac{2^\alpha p\pi i}{4q}} = \sum_{\rho=0}^{\rho=2q-1} e^{\rho^2 \frac{2^\alpha p\pi i}{q}} + e^{\frac{2^{\alpha-2} p\pi i}{q}} \sum_{\rho=0}^{\rho=2q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2^{\alpha+1} p\pi i}{q}},$$

qui se démontre comme il a été dit précédemment, et que l'on réduit de même à la suivante

$$(35) \qquad \frac{1}{2} \sum_{\rho=0}^{\rho=4q-1} e^{\rho^2 \frac{2^\alpha p\pi i}{4q}} = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho^2 \frac{2^\alpha p\pi i}{q}} + e^{\frac{2^{\alpha-2} p\pi i}{q}} \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2^{\alpha+1} p\pi i}{q}}.$$

Si $\alpha = 1$, et par suite $h = 2p$, il vient par les formules (33)

$$e^{\frac{p\pi i}{2q}} \mathrm{T} = e^{\frac{\pi i}{4}\left[1 + \frac{3(pq-1)^2 + (q-1)^2}{2}\right]} \left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{2q} - e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2} \left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{q};$$

puis par la formule (32)

$$\mathrm{T} = e^{-\frac{h\pi i}{4q}} e^{\frac{\pi i}{4}\left[hq + \frac{(q-1)^2}{2}\right]} \left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{q}.$$

C'est la troisième des formules (35) quand on ramène le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ au symbole $\left(\frac{h}{q}\right)$. Si $\alpha = 2$, et par suite $h = 4p$, dans le premier membre de la formule (35), la fraction $\frac{2^\alpha p\pi i}{4q}$ se réduit à $\frac{2^{\alpha-1} p\pi i}{2q}$, les deux termes de la fraction étant divisés par 2; il en résulte que ce premier membre est égal à

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=2q-1} e^{\rho^2 \frac{2p\pi i}{2q}} = 0.$$

Il reste donc

$$\mathrm{T} = -\, e^{-\frac{p\pi i}{q}} e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2} \left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{q} = e^{-\frac{h\pi i}{4q}} e^{\frac{\pi i}{4}\left[hq + \frac{(q-1)^2}{4}\right]} \left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{q};$$

d'où l'on passe immédiatement à la troisième des formules (34). Si

$\alpha > 3$, le premier membre de (35) se réduit, à cause du diviseur 4, à

$$2\sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho^2 \frac{2^{\alpha-2} p\pi i}{q}},$$

et il vient

$$e^{\frac{2^{\alpha-2} p\pi i}{q}} \mathrm{T} = 2e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2}\left(\frac{2^{\alpha-3}p}{q}\right)\sqrt{q} - e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2}\left(\frac{2^{\alpha-1}p}{q}\right)\sqrt{q},$$

d'où l'on déduit encore la même formule en remarquant que

$$\left(\frac{2^{\alpha-1}p}{q}\right) = \left(\frac{2^{\alpha-3}q}{q}\right),$$

puis ramenant le symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ au symbole $\left(\frac{h}{q}\right)$.

Revenons maintenant à la série de M. Hermite, et, supposant q positif, représentons-la par

$$\mathrm{U} = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho p\pi i + \rho^2 \frac{p\pi i}{q}} = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{-\rho p\pi i + \rho^2 \frac{p\pi i}{q}}.$$

En admettant que p peut être positif ou négatif, tous les cas sont compris dans cette forme. Quand p est pair, la série se réduit à celle de Gauss, et il n'y a rien à examiner de nouveau : il n'y a de série nouvelle que pour p impair. Elle s'exprime par les formules

$$(36)\quad \begin{cases} q \text{ impair}, & \mathrm{U} = e^{-\frac{\pi i}{4}(q-1)}\left(\frac{p}{q}\right)\sqrt{q}. \\ q = 2^{2n+1}\beta. & \mathrm{U} = e^{\frac{\pi i}{4}\left[-pq+1+\frac{3(p\beta-1)^2+(\beta-1)^2}{2}\right]}\left(\frac{p}{\beta}\right)\sqrt{q}, \\ q = 2^{2n}\beta, & \mathrm{U} = e^{\frac{\pi i}{4}\left[-pq+1+\frac{3(p\beta-1)^2+(\beta-1)^2+p^2-1}{2}\right]}\left(\frac{p}{\beta}\right)\sqrt{q}. \end{cases}$$

Si q est impair, on pose

$$p = mq + 2n,$$

m étant nécessairement impair. La série U devient

$$U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} e^{\rho^2 \frac{2n\pi i}{q}} = e^{\frac{\pi i}{8}(q-1)^2} \left(\frac{n}{q}\right) \sqrt{q}.$$

Les règles relatives au calcul des symboles font voir que

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{2n}{q}\right)(-1)^{-\frac{q^2-1}{8}}.$$

Mais de la congruence $2n \equiv p \pmod{q}$ il résulte

$$\left(\frac{2n}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right);$$

faisant ensuite les substitutions convenables, on trouve la première des formules (36).

Soient maintenant q pair et $q = 2^\alpha \beta$; en réunissant, ainsi qu'on l'a fait déjà, les termes positifs qui correspondent aux valeurs paires de ρ et les termes négatifs qui correspondent aux valeurs impaires, on a

$$(37) \qquad U = \sum_{\rho=0}^{\rho=2^{\alpha-1}\beta-1} e^{\rho^2 \frac{2p\pi i}{2^{\alpha-1}\beta}} - e^{\frac{p\pi i}{2^\alpha \beta}} \sum_{\rho=0}^{\rho=2^{\alpha-1}\beta-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{4p\pi i}{2^{\alpha-1}\beta}},$$

chacune des séries dont se compose la série U étant déterminée par les séries V et T. A cause du plus grand commun diviseur 2, la seconde somme, abstraction faite du facteur, est égale à

$$2 \sum_{\rho=0}^{\rho=2^{\alpha-1}\beta-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2} \frac{2p\pi i}{2^{\alpha-2}\beta}},$$

et, en admettant $\alpha > 2$, cette série est nulle, de sorte que l'on a simplement

$$U = \sum_{\rho=0}^{\rho=2^{\alpha-1}\beta-1} e^{\rho^2 \frac{2p\pi i}{2^{\alpha-1}\beta}},$$

série dont la somme a été donnée précédemment. Si $\alpha = 2n + 1$, sa valeur est déterminée par la troisième des formules (33); si $\alpha = 2n$, elle est déterminée par la quatrième. On obtient ainsi les formules données par M. Hermite. En y introduisant le facteur $e^{-\frac{\pi i}{4}pq}$, qui est égal à l'unité, puisque $\frac{q}{4}$ est au moins égal à 2, on a la deuxième et la troisième des formules (36).

Reste à démontrer les deux cas d'exception $\alpha = 2$, $\alpha = 1$; et c'est précisément pour obtenir, dans ces deux cas, les mêmes formules que nous avons introduit le facteur $e^{\frac{\pi i}{4}pq}$.

Si $\alpha = 2$, d'où $q = 4\beta$, la première série du second membre est nulle, et il reste

$$U = -e^{\frac{p\pi i}{4\beta}} \sum_{\rho=0}^{\rho=2\beta-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{4}\frac{4p\pi i}{2\beta}},$$

qui se réduit, à cause du plus grand commun diviseur 2, à

$$U = -2e^{\frac{p\pi i}{4\beta}} \sum_{\rho=0}^{\rho=\beta-1} e^{\frac{\rho^2+\rho}{2}\frac{2p\pi i}{\beta}}.$$

Les nombres p et β étant tous deux impairs, le signe $-$ peut être remplacé par le facteur $e^{-\frac{pq\pi i}{4}}$, et l'on retrouve la troisième des formules (36).

Si $\alpha = 1$, d'où $q = 2\beta$, on a, d'après les formules (37), (33) et (34),

$$\begin{aligned} U &= e^{\frac{\pi i}{8}(\beta-1)^2}\left(\frac{p}{\beta}\right)\sqrt{\beta} - e^{\frac{\pi i}{4}(2p\beta-\beta+1)}\left(\frac{2p}{\beta}\right)\sqrt{\beta} \\ &= e^{\frac{\pi i}{8}(\beta-1)^2}\left(\frac{p}{\beta}\right)\sqrt{q}\,\frac{1-e^{\frac{p\beta\pi i}{2}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

De la formule (32), en changeant p en $-p$, on déduit

$$\frac{1+e^{-\frac{p\beta\pi i}{2}}}{\sqrt{2}} = e^{\frac{\pi i}{4}\left[1+\frac{3(p\beta+1)^2}{2}\right]};$$

puis, en remarquant que $e^{-\frac{p\beta\pi i}{2}} = -e^{\frac{p\beta\pi i}{2}}$

$$U = e^{\frac{\pi i}{8}(\beta-1)^2}\left(\frac{p}{\beta}\right)\sqrt{q}\,e^{\frac{\pi i}{4}\left[1+\frac{3(p\beta+1)^2}{2}\right]};$$

cette dernière conduit immédiatement à la seconde des formules (36).

VI. Pour obtenir la valeur de ε, qui achève de réduire à une identité l'équation (3), il faut remonter à la formule (30), dont le premier membre est exprimé par la série U, quand on y change p en $-p$, et il faut, en outre, diviser U par $\sqrt{-iq}$. Par ce changement, les formules (36) deviennent d'abord

$$e^{-\frac{\pi i}{4}(q-1)}\left(\frac{-p}{q}\right)\sqrt{q},$$

$$e^{\frac{\pi i}{4}\left[pq+1+\frac{3(p\beta+1)^2+(\beta-1)^2}{2}\right]}\left(\frac{-p}{\beta}\right)\sqrt{q},$$

$$e^{\frac{\pi i}{4}\left[pq+1+\frac{3(p\beta+1)^2+(\beta-1)^2+p^2-1}{2}\right]}\left(\frac{-p}{\beta}\right)\sqrt{q};$$

puis, en les divisant par $\sqrt{-iq}$ et remplaçant le symbole $\left(\frac{-p}{\beta}\right)$ par $e^{\frac{\pi i}{2}(\beta-1)}\left(\frac{p}{\beta}\right)$, il vient, tous calculs faits, les formules (37).

Ces formules supposent q positif, tandis que dans le problème de la transformation q peut être négatif. S'il en est ainsi, posons $q = -q'$. D'après ce qui a été dit à la fin du § III, la série U doit être remplacée par la série

$$U = \sum_{\rho=0}^{\rho=q'-1} e^{\rho\left(p-\frac{2k}{q'}\right)\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q'}};$$

à la place de la formule (30), on a

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=q'-1} e^{\rho\left(p-\frac{2k}{q'}\right)\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q'}} = e^{ks\left(s+p+\frac{k}{q'}\right)\pi i}\sum_{\rho=0}^{\rho=q'-1} e^{-\rho p\pi i+\rho^2\frac{p\pi i}{q'}},$$

et dans les formules (36) il faut simplement changer q en q'; au lieu de diviser par $\sqrt{-iq}$, il faut diviser par $\sqrt{iq'}$, et l'on obtient, en résumé, en remarquant que

$$e^{\mathrm{K}sr\pi i} = e^{-\mathrm{K}sr\pi i}, \quad e^{\mathrm{K}sp\pi i} = e^{-\mathrm{K}sp\pi i},$$

à la place des formules (7), les formules

$$e^{-\mathrm{K}s\left(r-p+\frac{\mathrm{K}}{q'}\right)\pi i}\, e^{-\frac{q'\pi i}{4}} \left(\frac{p}{q'}\right),$$

$$e^{-\mathrm{K}s\left(r-p+\frac{\mathrm{K}}{q'}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[-q'p+\frac{3(p\beta'-1)^2+(\beta'-1)^2}{2}\right]} \left(\frac{p}{\beta'}\right),$$

$$e^{-\mathrm{K}s\left(r-p+\frac{\mathrm{K}}{q'}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[-q'p+\frac{3(p\beta'-1)^2+(\beta'-1)^2-(t^2-1)}{2}\right]} \left(\frac{p}{\beta'}\right).$$

Si l'on y change q en $-q'$, à cause de

$$\left(\frac{p}{-\beta}\right) = \left(\frac{p}{\beta}\right),$$

elles se réduisent aux formules (7); et ainsi il n'est pas nécessaire de distinguer le cas de q positif du cas de q négatif.

VII. Considérons maintenant le cas où la partie imaginaire de $\frac{q}{\omega\Omega}$ est négative. Au lieu de l'équation (3), nous poserons

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\pi i(\mathrm{A}z^2-2\mathrm{B}z)} \sum e^{\frac{\pi i}{\Omega}(2mz-\mathrm{C}+m^2\Omega')} = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{\omega}} e^{\pi i\left[az^2+2bz-\frac{(\mathrm{B}-b)^2}{\mathrm{A}-a}\right]} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}(2mz-c+m^2\omega')},$$

en considérant les périodes Ω, Ω' comme les périodes primitives. Alors, en opérant comme précédemment, il y aura dans le premier membre la quantité $\mathrm{A}-a$, c'est-à-dire la quantité $\frac{q}{\omega\Omega}$ changée de signe; tous les calculs du § III deviennent applicables, et il n'y a qu'à changer, ainsi qu'on l'a dit au § I, les quantités

$$\omega,\ \omega',\ p,\ q,\ r,\ s,\ a,\ b,\ c,\ h,\ k,$$

dans les quantités

$$\Omega,\ \Omega',\ s,\ -q-r,\ p,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{H},\ \mathrm{K}.$$

La quantité ε' se trouve déterminée par le même changement, et l'on a, à la place des formules (7),

$$\varepsilon' = e^{-kp\left(-r-s+\frac{h}{q}\right)\pi i}\, e^{-\frac{q\pi i}{4}} \left(\frac{s}{-q}\right),$$

$$\varepsilon' = e^{-kp\left(-r-s+\frac{h}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[-sq+\frac{3(s\beta-1)^2+(\beta-1)^2}{2}\right]} \left(\frac{s}{-\beta}\right),$$

$$\varepsilon' = e^{-kp\left(-r-s+\frac{h}{q}\right)\pi i}\, e^{\frac{\pi i}{4}\left[-sq+\frac{3(s\beta-1)^2+(\beta-1)^2+s^2-1}{2}\right]} \left(\frac{s}{-\beta}\right).$$

Or, de $ps-qr=1$, c'est-à-dire de la congruence $ps\equiv 1$ (mod. β ou mod. q), on déduit

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{s}{q}\right) = \left(\frac{ps}{q}\right) = \left(\frac{1}{q}\right) = 1 = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{s}{-q}\right).$$

Posant alors $\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon'}$, pour revenir à l'équation (3), on trouve les formules (8).

VIII. Nous avons supposé les nombres h, k, H, K arbitraires et liés par les équations (6) et (6 *bis*). La détermination de ces nombres peut se faire en précisant les valeurs des quantités c et C introduites dans les expressions des fonctions intermédiaires.

D'abord, dans toute fonction intermédiaire,

$$f(z) = e^{\pi i(az^2+2bz)} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2mz(-c)+m^2\omega']},$$

on peut considérer la quantité c comme comprise dans le parallélogramme des périodes (ω, ω'). Car s'il en est autrement, c étant une quantité comprise dans le parallélogramme, h et k des nombres entiers,

désignons par $c + h\omega + k\omega'$ la quantité correspondante qui entre dans l'expression de la fonction intermédiaire; celle-ci est définie par la formule

$$f(z) = e^{\pi i(az^2 + 2bz)} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z - c - h\omega - k\omega') + m^2\omega']}.$$

En premier lieu, l'exponentielle sous le signe Σ doit être réduite à

$$e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z - c - k\omega') + m^2\omega']},$$

puisque, quel que soit m, on a $e^{-2mh\pi i} = 1$; en second lieu, la quantité qui a $\frac{\pi i}{\omega}$ pour coefficient peut s'écrire

$$2(m-k)(z-c) + (m-k)^2\omega' + 2k(z-c) - k^2\omega';$$

et pour former la série il faut donner à m des valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; on obtient évidemment le même résultat en donnant ces valeurs entières à $m - k$. Par suite, la série de la formule précédente est égale à

$$\sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z-c) + m^2\omega'] + \frac{\pi i}{\omega}[2k(z - c) - k^2\omega']};$$

et comme nous faisons abstraction d'un facteur constant et qu'on peut supposer le facteur $e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2kc + k^2\omega')}$ compris dans cette constante, on a en résumé

$$f(z) = e^{\pi i\left[az^2 + 2\left(b - \frac{k}{\omega}\right)z\right]} \sum e^{\frac{\pi i}{\omega}[2m(z - c) + m^2\omega']}.$$

Ainsi, l'on peut toujours supposer que, dans le premier membre de l'équation (3), la quantité c est comprise dans le parallélogramme (ω, ω'). La troisième des équations (1) peut s'écrire

$$C = c + sr\frac{\Omega}{2} - pq\frac{\Omega'}{2} + H\Omega - K\Omega',$$

et elle montre immédiatement qu'on peut déterminer les nombres H

et K de telle sorte que la quantité C soit comprise dans le parallélogramme $(\Omega\Omega')$.

Considérant la transformation inverse, il faut supposer que, dans le second membre, C est choisi de manière à être compris dans le parallélogramme $(\Omega\Omega')$, et alors on comprend c dans le parallélogramme $(\omega\omega')$ en déterminant convenablement les nombres g et k.

Sur l'établissement des équations données par M. Resal pour représenter le mouvement d'une courbe funiculaire plane;

PAR M. H. LÉAUTÉ.

Les équations du mouvement d'une courbe funiculaire plane ont été données par M. Resal ([1]), qui, désignant par α l'angle de la tangente avec l'axe des x, par u et v les composantes normale et tangentielle de la vitesse V, a obtenu la forme la plus simple à laquelle puissent se ramener les trois équations aux différences partielles simultanées qui déterminent α, u et v en fonction de l'arc s et du temps t.

Après avoir établi ces équations, M. Resal, dans son *Traité de Mécanique générale*, les a appliquées au cas du mouvement lent ([2]) d'une corde dont un point est fixe.

Cette partie de la démonstration donne lieu à une difficulté qui m'a paru réelle et qui provient de ce que M. Resal, n'ayant voulu traiter que le cas où la corde est très voisine de la ligne droite, ce qui résulte de son raisonnement même, n'a pas indiqué explicitement cette restriction. Et comme la question du mouvement des courbes funiculaires est d'une sérieuse importance, tant par les difficultés mathématiques qu'elle présente que par les applications dont elle est susceptible, comme d'un autre côté le travail de M. Resal sur ce sujet est aujourd'hui devenu classique, il est utile de signaler cette difficulté.

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*

([2]) *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 321.

J'aborderai ensuite le problème dans toute sa généralité, afin d'établir les équations des petites oscillations d'une corde inextensible dans l'espace. Les formules auxquelles je serai conduit n'ont pas encore été obtenues, je crois; elles se réduiront à celles de M. Resal dans le cas plus simple de la courbe plane.

Enfin j'indiquerai une démonstration directe de ce dernier cas en me servant de la considération des mouvements relatifs, et la méthode suivie, tout en ne conduisant naturellement qu'à des résultats déjà obtenus, aura du moins l'avantage de fournir une signification claire des différents termes qui composent les équations.

I.

Discussion de la méthode suivie par M. Resal pour passer du cas du mouvement quelconque d'une courbe funiculaire plane à celui du mouvement très lent.

Si l'on considère une courbe funiculaire plane, on a toujours, aux termes du troisième ordre près, et dans le système de notations précédemment rappelé,

$$\frac{dv}{ds} - u\frac{d\alpha}{ds} = 0, \tag{1}$$

équation qui exprime l'invariabilité de longueur d'un élément de corde.

On a de même

$$\frac{du}{ds} + v\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d\alpha}{dt} = 0. \tag{2}$$

Cela posé, M. Resal, pour le cas du mouvement très lent, fait le raisonnement qui suit : « Supposons que le mouvement soit assez lent pour qu'on puisse négliger les termes du second ordre en u, v, $\frac{d\alpha}{dt}$. L'équation (1) donne $\frac{dv}{ds} = 0$, et, comme un point de la corde est fixe, il faut que $v = 0$. L'équation (2) devient

$$\frac{du}{ds} = \frac{d\alpha}{dt}. \text{ »}$$

Ce raisonnement suppose implicitement que la corde s'écarte infiniment peu de la ligne droite, car cette condition est nécessaire pour qu'on puisse affirmer que $u\frac{d\alpha}{ds}$ est du second ordre quand u, v et $\frac{d\alpha}{dt}$ sont du premier.

En effet, on ne concevrait pas, *a priori*, que l'équation (1), qui exprime simplement l'inextensibilité de la corde, changeât de forme selon que le mouvement est lent ou rapide. On voit, au contraire, que $u\frac{d\alpha}{ds}$ ne sera du second ordre que lorsque $\frac{d\alpha}{ds}$ sera du premier, ce qui nécessite que α lui-même soit du premier ordre ou, si l'on veut, que la corde reste très voisine de la ligne droite.

Il est d'ailleurs facile de démontrer directement que v ne peut être nul que dans ce cas.

Pour cela, remarquons que la quantité v représente la composante de la vitesse suivant la tangente; elle ne peut donc être toujours nulle que si les deux extrémités A et B de l'élément considéré [1] sont venues en A′ et B′ sur les normales AA′ et BB′ à la corde en A et B. Or, si l'on projette B′ en b' sur la tangente en A à l'élément AB, la longueur Ab' sera égale à A′B′, c'est-à-dire à AB, aux termes du troisième ordre près, et, par suite, B sera à une distance infiniment petite du troisième ordre de la droite B′b'.

Cela exige que l'angle BB′b' soit du second ordre, c'est-à-dire que les deux normales en A et B fassent un angle infiniment petit du second ordre. Le rayon de courbure en A est donc infini, et l'élément AB s'écarte infiniment peu d'une ligne droite.

Il est ainsi démontré que l'équation

$$\frac{dv}{ds} = 0$$

n'est rigoureuse que lorsque la corde est rectiligne ou lorsqu'il s'agit d'un point d'inflexion; elle pourra être admise comme approchée quand l'arc que l'on étudie aura un rayon de courbure regardé comme grand dans l'ordre d'approximation que l'on considère.

---

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

C'est ainsi, par exemple, que, dans le cas des câbles d'extraction employés dans les puits de mine pour l'enlèvement des bennes, l'équation dont il s'agit sera évidemment applicable.

II.

Équations des petites oscillations dans le cas du mouvement d'une corde dans l'espace.

Pour établir les équations des petites oscillations d'une corde, nous nous placerons dans le cas le plus général, c'est-à-dire que, au lieu d'étudier simplement les petits mouvements en supposant la corde primitivement au repos écartée ensuite de sa position d'équilibre, nous examinerons les petites oscillations qu'elle peut présenter lorsqu'elle était tout d'abord animée d'un mouvement permanent de vitesse quelconque.

Le problème ainsi traité aura non seulement une généralité plus grande, mais surtout une importance pratique plus considérable, puisque ce sera la question même des câbles télodynamiques qui sera ainsi résolue.

Désignons par x, y, z, μ, T les coordonnées rectangulaires d'un point de la corde et la tension en ce point, μ étant la masse de l'unité de longueur, par X, Y, Z les composantes de la force extérieure sur l'unité de masse, et par s et t les deux variables indépendantes qui représentent la longueur d'arc et le temps.

On sait que les équations générales du mouvement sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right),\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right), \end{aligned}\right.$$

avec la condition

$$(2)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

qui exprime l'inextensibilité de la corde.

Nous supposerons, ainsi que nous venons de le dire, que le mouvement permanent soit tout d'abord réalisé, et nous désignerons par V la vitesse correspondante, qui, ainsi que nous l'avons démontré dans un autre travail ([1]), est alors la même en tous les points et est indépendante du temps; puis nous imaginerons que l'on écarte légèrement la corde de cette position, et nous représenterons par $x + x_1$, $y + y_1$, $z + z_1$, $\mu(T + T_1)$, ce que deviennent les coordonnées du point considéré et la tension en ce point.

Si X_1, Y_1, Z_1 sont les accroissements qu'éprouve la force extérieure X, Y, Z lorsqu'on passe du point (x, y, z) au point $(x + x_1, y + y_1, z + z_1)$, on a

$$\frac{d^2(x + x_1)}{dt^2} = X + X_1 + \frac{d}{ds}\left[(T + T_1)\frac{d(x + x_1)}{ds}\right],$$

$$\frac{d^2(y + y_1)}{dt^2} = Y + Y_1 + \frac{d}{ds}\left[(T + T_1)\frac{d(y + y_1)}{ds}\right],$$

$$\frac{d^2(z + z_1)}{dt^2} = Z + Z_1 + \frac{d}{ds}\left[(T + T_1)\frac{d(z + z_1)}{ds}\right],$$

$$\left[\frac{d(x + x_1)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d(y + y_1)}{ds}\right]^2 + \left[\frac{d(z + z_1)}{ds}\right]^2 = 1.$$

Ces équations deviennent, si l'on tient compte des équations (1) et (2), et si l'on suppose les quantités x_1, y_1, z_1, T_1 assez petites pour qu'il soit permis de négliger, par rapport à elles ou à leurs dérivées, les termes du second ordre,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx_1}{ds} + T_1\frac{dx}{ds}\right), \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_1 + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy_1}{ds} + T_1\frac{dy}{ds}\right), \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= Z_1 + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz_1}{ds} + T_1\frac{dz}{ds}\right), \\ \frac{dx}{ds}\frac{dx_1}{ds} &+ \frac{dy}{ds}\frac{dy_1}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{dz_1}{ds} = 0. \end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

$$S + Vt = \sigma$$

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 10 novembre 1879.

et prenons pour variables σ et t, ce qui nous permettra de comparer le mouvement apparent de la corde qui oscille à la forme qu'elle a dans l'état permanent, puisque la quantité σ détermine un point de la corde qui, dans l'état permanent, occupe toujours la même position dans l'espace.

Les équations précédentes deviennent alors, en représentant $T - V^2$ par ϖ,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{dx_1}{d\sigma} + T_1\frac{dx}{d\sigma}\right) - 2V\frac{d^2x_1}{d\sigma\,dt},\\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{dy_1}{d\sigma} + T_1\frac{dy}{d\sigma}\right) - 2V\frac{d^2y_1}{d\sigma\,dt},\\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= Z_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{dz_1}{d\sigma} + T_1\frac{dz}{d\sigma}\right) - 2V\frac{d^2z_1}{d\sigma\,dt},\\ &\frac{dx}{d\sigma}\frac{dx_1}{d\sigma} + \frac{dy}{d\sigma}\frac{dy_1}{d\sigma} + \frac{dz}{d\sigma}\frac{dz_1}{d\sigma} = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant opérer un changement de coordonnées analogue à celui qui a conduit M. Resal, dans le cas de la courbe plane, aux équations les plus simples. Nous choisirons pour nouveaux axes la tangente, la normale principale et la binormale à la courbe de repos apparent au point considéré, c'est-à-dire que nous remplacerons les axes correspondant à x_1, y_1, z_1 par d'autres dont les inclinaisons varient à chaque instant, de manière à se coucher sur les trois directions dont il vient d'être question.

Le nouveau système de coordonnées est donc variable à la fois avec le point que l'on considère et avec l'instant dont il s'agit; toutefois, sa position ne dépend que de celle qu'occuperait le point matériel, à l'instant choisi, sur la courbe de repos apparent dans le mouvement permanent, c'est-à-dire que de σ.

Afin de simplifier un peu le calcul nécessité par ce changement d'axes, nous remarquerons que, la direction des anciennes coordonnées étant complètement indépendante de celle des nouvelles, il nous est permis, pour obtenir les formules définitives, de supposer les premières coordonnées parallèles aux nouvelles à l'instant considéré et pour le point que l'on envisage spécialement.

Cela posé, nous nous servirons, pour opérer la transformation d'axes qui vient d'être indiquée, des formules de M. Serret, et, comme elles

nécessitent quelques calculs assez compliqués, nous donnerons le détail des opérations.

Soient α, β, γ les nouvelles coordonnées dirigées respectivement suivant la tangente, la binormale et la normale principale à la courbe de repos apparent; si l'on désigne les angles qu'elles forment avec les anciennes de la façon suivante,

$$\begin{array}{cccc} & x, & y, & z, \\ \alpha, & \lambda, & \mu, & \nu, \\ \beta, & \lambda', & \mu', & \nu', \\ \gamma, & \lambda'', & \mu'', & \nu'', \end{array}$$

et si l'on représente par ρ et r les rayons de première et de seconde courbure de la courbe de repos apparent, on a, dans le cas général,

$$\frac{d\cos\lambda}{d\sigma} = \frac{\cos\lambda''}{\rho},$$

$$\frac{d\cos\lambda'}{d\sigma} = \frac{\cos\lambda''}{r},$$

$$\frac{d\cos\lambda''}{d\sigma} = -\frac{\cos\lambda}{\rho} - \frac{\cos\lambda'}{r},$$

$$\frac{d^2\cos\lambda}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\lambda}{\rho^2} - \frac{\cos\lambda'}{r\rho} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda''}{\rho}\right),$$

$$\frac{d^2\cos\lambda'}{d\sigma^2} = -\frac{\cos\lambda}{r\rho} - \frac{\cos\lambda'}{r^2} + \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda''}{r}\right),$$

$$\frac{d^2\cos\lambda''}{d\sigma^2} = -\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda}{\rho}\right) - \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\cos\lambda'}{r}\right) - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)\cos\lambda''.$$

Dans le cas particulier où les deux systèmes d'axes sont parallèles, on trouve

$$\begin{array}{lll} \cos\lambda = 1, & \cos\mu = 0, & \cos\nu = 0, \\ \cos\lambda' = 0, & \cos\mu' = 1, & \cos\nu' = 0, \\ \cos\lambda'' = 0, & \cos\mu'' = 0, & \cos\nu'' = 1, \\ \dfrac{d\cos\lambda}{d\sigma} = 0, & \dfrac{d\cos\mu}{d\sigma} = 0, & \dfrac{d\cos\nu}{d\sigma} = \dfrac{1}{\rho}, \\ \dfrac{d\cos\lambda'}{d\sigma} = 0, & \dfrac{d\cos\mu'}{d\sigma} = 0, & \dfrac{d\cos\nu'}{d\sigma} = \dfrac{1}{r}, \end{array}$$

$$\frac{d\cos\lambda''}{d\sigma} = -\frac{1}{\rho}, \quad \frac{d\cos\mu''}{d\sigma} = -\frac{1}{r}, \quad \frac{d\cos\nu''}{d\sigma} = 0,$$

$$\frac{d^2\cos\lambda}{d\sigma^2} = -\frac{1}{\rho^2}, \qquad \frac{d^2\cos\mu}{d\sigma^2} = -\frac{1}{r\rho}, \qquad \frac{d^2\cos\nu}{d\sigma^2} = \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2\cos\lambda'}{d\sigma^2} = -\frac{1}{r\rho}, \qquad \frac{d^2\cos\mu'}{d\sigma^2} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \frac{d^2\cos\nu'}{d\sigma^2} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2\cos\lambda''}{d\sigma^2} = -\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\sigma}, \quad \frac{d^2\cos\mu''}{d\sigma^2} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\sigma}, \quad \frac{d^2\cos\nu''}{d\sigma^2} = -\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right).$$

On a d'ailleurs

$$x_1 = \alpha\cos\lambda + \beta\cos\lambda' + \gamma\cos\lambda'',$$
$$y_1 = \alpha\cos\mu + \beta\cos\mu' + \gamma\cos\mu'',$$
$$z_1 = \alpha\cos\nu + \beta\cos\nu' + \gamma\cos\nu'';$$

on en déduit

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho},$$
$$\frac{dy_1}{d\sigma} = \frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\gamma}{r},$$
$$\frac{dz_1}{d\sigma} = \frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\beta}{r} + \frac{\alpha}{\rho},$$

$$\frac{d^2x_1}{d\sigma^2} = \frac{d^2\alpha}{d\sigma^2} - 2\frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{\beta}{r\rho} - \gamma\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2y_1}{d\sigma^2} = \frac{d^2\beta}{d\sigma^2} - 2\frac{d\gamma}{d\sigma}\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{r\rho} - \frac{\beta}{r^2} - \gamma\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2z_1}{d\sigma^2} = \frac{d^2\gamma}{d\sigma^2} + 2\frac{d\alpha}{d\sigma}\frac{1}{\rho} + 2\frac{d\beta}{d\sigma}\frac{1}{r} + \alpha\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\sigma} + \beta\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\sigma} - \gamma\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right).$$

Afin de simplifier l'écriture et de donner aux équations une forme plus explicite en mettant en évidence des quantités utiles à considérer,

nous poserons

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = \varepsilon,$$

$$\frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\gamma}{r} = \psi,$$

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\beta}{r} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega.$$

Ces quantités sont respectivement égales à $\frac{dx_1}{d\sigma}$, $\frac{dy_1}{d\sigma}$, $\frac{dz_1}{d\sigma}$; leur signification géométrique en résulte alors immédiatement, si l'on se rappelle que les quantités x_1, y_1, z_1 sont dirigées suivant les axes α, β, γ. La quantité ε est l'allongement relatif de l'élément de corde; il est nul dans le cas que nous traitons, puisque la corde est inextensible. ψ est le sinus de l'angle que forme l'élément oscillant avec le plan osculateur $M\alpha\gamma$ ou, si l'on veut, l'angle lui-même, puisqu'il reste toujours petit. Enfin ω est l'angle de l'élément dont il s'agit avec le plan $M\alpha\beta$, perpendiculaire à la normale principale.

Avec ces notations, les formules qui viennent d'être écrites deviennent

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \varepsilon, \qquad \frac{dy_1}{d\sigma} = \psi, \qquad \frac{dz_1}{d\sigma} = \omega,$$

$$\frac{d^2 x_1}{d\sigma^2} = \frac{d\varepsilon}{d\sigma} - \frac{\omega}{\rho}, \quad \frac{d^2 y_1}{d\sigma^2} = \frac{d\psi}{d\sigma} - \frac{\omega}{r}, \quad \frac{d^2 z_1}{d\sigma^2} = \frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{\psi}{r}.$$

Si l'on remarque, de plus, que les quantités α, β, γ sont fixes lorsque σ est constant, on obtient

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt} = \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{dz_1}{dt} = \frac{d\gamma}{dt},$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 x_1}{d\sigma\, dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad \frac{d^2 y_1}{d\sigma\, dt} = \frac{d\psi}{dt}, \quad \frac{d^2 z_1}{d\sigma\, dt} = \frac{d\omega}{dt}.$$

En tenant compte alors de ce que

$$\frac{dx}{d\sigma} = 1, \quad \frac{dy}{d\sigma} = 0, \quad \frac{dz}{d\sigma} = 0,$$

$$\frac{d^2 x}{d\sigma^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{d\sigma^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{d\sigma^2} = \frac{1}{\rho},$$

puisque les axes sont supposés dirigés suivant la tangente, la binormale et la normale principale, les équations du mouvement de la corde, supposée inextensible, prennent la forme (en désignant par A_1, B_1, C_1 les accroissements des composantes suivant $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ de la force accélératrice quand on passe du point M au point M')

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A_1 - \mathfrak{T}\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},\\ &\frac{d^2\beta}{dt^2} = B_1 + \frac{d\mathfrak{T}}{d\sigma}\psi + \mathfrak{T}\left(\frac{d\psi}{d\sigma} - \frac{\omega}{r}\right) - 2V\frac{d\psi}{dt},\\ &\frac{d^2\gamma}{dt^2} = C_1 + \frac{d\mathfrak{T}}{d\sigma}\omega + \mathfrak{T}\left(\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\psi}{r}\right) - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},\\ &\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,\\ &\frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\gamma}{r} = \psi,\\ &\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\beta}{r} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega. \end{aligned}\right.$$

Il suffit maintenant, pour passer au cas particulier de la courbe plane étudié par M. Resal, de faire infini le rayon de seconde courbure r. Les formules précédentes deviennent alors

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A_1 - \mathfrak{T}\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},\\ &\frac{d^2\beta}{dt^2} = B_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\mathfrak{T}\frac{d\beta}{d\sigma}\right) - 2V\frac{d^2\beta}{d\sigma\,dt},\\ &\frac{d^2\gamma}{dt^2} = C_1 + \frac{d}{d\sigma}(\mathfrak{T}\omega) - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},\\ &\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,\\ &\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega. \end{aligned}\right.$$

Une remarque importante doit être faite ici. Si B_1 ne dépend que de β, et si A_1 et C_1 en sont indépendants, la seconde équation ne con-

tient pas l'accroissement de tension T_1 et elle est la seule qui renferme la variable β. Or β, qui est dirigé suivant la perpendiculaire au plan de la courbe, représente ce que l'on peut appeler l'*oscillation latérale*. On voit donc que, dans ce cas particulier, ces oscillations n'influent en rien sur la tension.

Il est évident que la réciproque est vraie et que les variations de tension ne pourront produire d'oscillations latérales tant que B_1 ne contiendra que β et que A_1 et C_1 ne le renfermeront pas.

Ce théorème, qui est évidemment applicable aux transmissions télodynamiques, puisque, la seule force extérieure étant alors la pesanteur, les quantités A_1, B_1 et C_1 sont nulles, nous montre que dans un câble métallique les oscillations latérales n'ont pas d'influence sur la régularité du mouvement et que, réciproquement, les changements de tension produits par les inégalités de vitesse des poulies ne peuvent donner lieu directement à des oscillations latérales.

Les équations (6), relatives à la courbe plane, sont identiques à celles obtenues par M. Resal lorsqu'on se place dans les conditions où il a traité le problème, c'est-à-dire lorsqu'on suppose que la seule force agissante est la pesanteur, que la corde est tout d'abord au repos, que le mouvement a lieu dans un plan et que l'arc considéré ne comprend qu'un très petit nombre de degrés dans le voisinage du sommet.

En effet, la pesanteur étant constante, les quantités A_1, B_1, C_1 sont nulles; le mouvement ayant lieu dans le plan des xy, on laissera de côté l'équation en β; enfin, la corde étant supposée primitivement au repos, V est égal à zéro, $\mathfrak{T}$ à T et σ à s.

Les équations (6) prennent alors la forme

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = -\dfrac{T}{\rho}\omega + \dfrac{dT_1}{ds}, \\ \dfrac{d^2\gamma}{dt^2} = \dfrac{d(T\omega)}{ds} + \dfrac{T_1}{\rho}, \\ \dfrac{d\alpha}{ds} - \dfrac{\gamma}{\rho} = 0, \\ \dfrac{d\gamma}{ds} + \dfrac{\alpha}{\rho} = \omega. \end{cases}$$

Si l'on élimine T_1 entre les deux premières, on trouve

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d\gamma}{ds}-\frac{\alpha}{\rho}\right) &= \omega\left(\frac{T}{\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\frac{dT}{ds}+\frac{d^2T}{ds^2}\right) \\ &\quad + \frac{d\omega}{ds}\left(2\frac{dT}{ds}+\frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right)+T\frac{d^2\omega}{ds^2}-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\end{aligned}\right.$$

On sait d'ailleurs que dans le cas de la chaînette, si l'on appelle θ l'angle de l'élément ds avec l'horizontale et R le rayon de courbure au sommet, on a

$$\rho = \frac{R}{\cos^2\theta},\quad s = R\,\mathrm{tang}\,\theta,\quad T = \frac{Rg}{\cos\theta}.$$

On en déduit

$$\frac{d\rho}{ds} = 2\,\mathrm{tang}\,\theta,\quad \frac{T}{\rho} = g\cos\theta,\quad \frac{dT}{ds} = g\sin\theta,\quad \frac{d^2T}{ds^2} = \frac{g}{R}\cos^3\theta.$$

Si l'on suppose maintenant que l'angle θ reste assez petit pour qu'il soit permis de négliger les termes qui le contiennent à une puissance supérieure à la première, on peut écrire

$$\rho = R,\quad s = R\theta,\quad T = Rg;$$
$$\frac{d\rho}{ds} = 2\theta,\quad \frac{T}{\rho} = g,\quad \frac{dT}{ds} = g\theta,\quad \frac{d^2T}{ds^2} = \frac{g}{R}.$$

En portant ces valeurs dans les équations (7), on obtient, au degré d'approximation adopté,

$$(9)\qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g\omega + \frac{dT_1}{ds},$$

$$(10)\qquad \frac{d^2\gamma}{dt^2} = Rg\frac{d\omega}{ds} + \frac{T_1}{R},$$

$$(11)\qquad \frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{R} = 0,$$

$$(12)\qquad \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{R} = \omega,$$

et l'équation (8) devient

$$(13)\qquad \frac{d^2\left(\frac{d\gamma}{ds}-\frac{\alpha}{R}\right)}{dt^2} = 2\frac{g}{R}\omega + Rg\frac{d^2\omega}{ds^2};$$

mais, si l'on dérive l'équation (11) par rapport à s, on a

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{1}{R}\frac{d\gamma}{ds},$$

et l'on en conclut, par l'équation (12),

$$R\frac{d^2\alpha}{ds^2} + \frac{\alpha}{R} = \omega,$$

et par suite

$$\alpha = \sin\frac{s}{R}\int\omega\cos\frac{s}{R}\,ds - \cos\frac{s}{R}\int\omega\sin\frac{s}{R}\,ds,$$

ou simplement, puisque l'arc $\frac{s}{R}$ est petit,

$$(14) \qquad \alpha = \frac{1}{R}\left(s\int\omega\,ds - \int\omega s\,ds\right).$$

Il résulte de là que la quantité α peut se mettre sous la forme

$$\alpha = \frac{s^2}{R}\omega',$$

ω' étant une certaine quantité intermédiaire entre les diverses valeurs de ω.

Cette relation nous conduit à cette conséquence importante que $\frac{\alpha}{R}$ est petit par rapport à ω, puisque l'angle $\frac{s}{R}$ est, par hypothèse, petit.

Quant à $\frac{d\gamma}{ds}$ ou, si l'on veut, $R\frac{d^2\alpha}{ds^2}$, il est du même ordre de grandeur que ω d'après l'équation (12), et il peut être pris égal à cette quantité, puisque $\frac{\alpha}{R}$ est négligeable.

Les équations (12) et (13) deviennent alors

$$\frac{d\gamma}{ds} = \omega,$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{2g}{R}\omega + Rg\frac{d^2\omega}{ds^2},$$

et la dernière peut s'écrire

$$(15) \qquad 2\omega + \frac{d^2\omega}{d\theta^2} - \frac{R}{g}\frac{d^2\omega}{dt^2} = 0,$$

qui, sauf les notations, est identiquement celle indiquée par M. Resal [1] pour les petits mouvements d'une chaînette.

Il ne reste plus qu'à montrer comment la solution s'achève par de simples quadratures.

La valeur de ω est donnée, comme on sait, par la suite

$$\omega = \sum K \cos\left[\theta + \varepsilon\sqrt{\frac{RK'^2}{g} + 2}\right]\cos(K' t + \varepsilon'),$$

ε, ε', K et K' étant des constantes.

Quant à γ et à α, ils sont fournis par les relations

$$\gamma = \int \omega\, ds,$$

$$\alpha = \frac{1}{R}\int \gamma\, ds = \frac{1}{R}\int\int \omega\, ds^2.$$

Il est d'ailleurs facile de reconnaître, à l'aide d'une intégration par parties, que cette dernière expression revient bien à l'expression (14) donnée plus haut.

Le problème est donc complètement terminé, et nous avons montré que l'équation finale donnée par M. Resal était non seulement exacte, malgré la difficulté signalée dans le mode de raisonnement employé pour l'établir, mais encore qu'elle ne supposait en rien l'hypothèse restrictive de la fixité des extrémités.

En résumé, il se produit dans le travail de M. Resal ce fait remarquable, que l'équation simplifiée à laquelle il arrive pour le cas de la chaînette, lorsque l'arc ne dépasse pas une vingtaine de degrés, est exacte, alors que l'équation dont elle dérive immédiatement n'est pas

---

(1) Voir le *Traité de Mécanique générale* de M. Resal, t. I, p. 329, § 97 : *Équations des petits mouvements d'une chaînette*.

admissible dans le cas général. Il est intéressant d'expliquer la raison de cette singularité.

Le raisonnement fait par M. Resal pour traiter le cas du mouvement très lent suppose, comme nous l'avons vu, que la vitesse tangentielle reste constamment nulle, c'est-à-dire (avec le système de notations adoptées dans notre travail) que α reste toujours nul quand les extrémités sont fixes. Cette hypothèse n'est pas rigoureusement exacte et paraît inadmissible *a priori;* mais il arrive, ainsi que nous l'avons démontré, que, pour un arc peu étendu, α est petit par rapport aux deux quantités γ et ω, de telle sorte que, en négligeant les termes en α dès le début, on n'a pas altéré, en fin de compte, l'équation finale en ω.

C'est là un point curieux de cette question, que les deux inconnues principales α et γ ne sont pas du même ordre de grandeur, si bien que la première, étant négligeable par rapport à l'autre, disparaît des équations qui donnent γ, et que l'on est ainsi tenté d'admettre qu'elle est toujours nulle. On peut d'ailleurs, *a priori*, prévoir cette particularité, car on sait que les flèches d'un arc d'un petit nombre de degrés sont grandes par rapport aux différences entre cet arc et sa corde.

La méthode que nous avons suivie a ce double avantage, qu'en prenant α pour variable principale nous évitons forcément l'erreur signalée et que nous obtenons la valeur de cette quantité α.

III.

Établissement des équations des petits mouvements d'une courbe funiculaire plane par la considération des mouvements relatifs.

Soient MM_1 la position d'un élément de câble dans la courbe de repos apparent et $M'M'_1$ la position du même élément à un instant quelconque t [1].

Le point M' peut être considéré comme en équilibre sous l'action de

[1] Dans tout ce qui suit, on distinguera par l'accentuation les quantités se rapportant au mouvement réel; celles qui ne seront pas pourvues d'accent seront relatives à la courbe de repos apparent

la tension $\mu T'$ du câble en ce point, des forces extérieures et des forces d'inertie dues à son mouvement.

Si donc on désigne par F'_t et F'_n, φ'_t et φ'_n les composantes des forces extérieures et des forces d'inertie suivant la tangente et la normale à $M'M'_1$ en M', on a

$$\frac{dT'}{ds'} + F'_t + \varphi'_t = 0, \tag{16}$$

$$\frac{T'}{\rho'} + F'_n + \varphi'_n = 0, \tag{17}$$

s' et ρ' étant l'arc et le rayon de courbure correspondant au point M' dans la courbe $M'M'_1$.

Prenons pour axes α et γ la tangente et la normale en M à la courbe de repos apparent et posons

$$T' = T + T_1; \tag{18}$$

on a évidemment

$$\frac{ds'}{\rho'} = \frac{ds}{\rho} + d\omega, \tag{19}$$

ω étant l'angle de la tangente en M' avec la tangente en M.

D'un autre côté, si du point M'_1 on abaisse la perpendiculaire $M'_1 m'_1$ sur la droite $M'm'_1$ parallèle à la tangente en M, on a

$$M'_1 m'_1 = ds' \sin\omega;$$

or, si l'on projette M' en P sur la tangente en M et M'_1 en P_1 sur la tangente en M_1, on peut regarder $M'_1 m'_1$ comme la projection sur l'axe $M\gamma$ du chemin $M'_1 P_1 M_1 P M'$, et l'on trouve

$$M'_1 m_1 = d\gamma + \alpha \frac{ds}{\rho}.$$

La corde étant inextensible, c'est-à-dire ds' étant égal à ds, on déduit des deux équations précédentes, en remarquant que ω est petit,

$$\omega = \frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}. \tag{20}$$

Cela posé, la considération du triangle $M'_1 m'_1 M'$ donne

$$M' m'_1 = ds + d\alpha - \gamma \frac{ds}{\rho},$$

et, comme $M' m'_1$ ne diffère de ds que d'une quantité très petite, puisque l'angle ω est lui-même petit, on a

$$(21) \qquad \frac{d\alpha}{ds} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,$$

qui est l'une des équations auxquelles nous sommes arrivés par la méthode précédente.

Représentons maintenant par A' et C' les composantes suivant $M\alpha$ et $M\gamma$ de la force extérieure agissant sur M'; on aura

$$F'_t = \quad A' \cos\omega + C' \sin\omega = A' + C'\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right),$$
$$F'_n = -A' \sin\omega + C' \cos\omega = -A'\left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right) + C'.$$

De même

$$\varphi'_t = \varphi'_\alpha + \varphi'_\gamma \left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right),$$
$$\varphi'_n = -\varphi'_\alpha \left(\frac{d\gamma}{ds} + \frac{\alpha}{\rho}\right) + \varphi'_\gamma,$$

et il suffit de calculer φ'_α et φ'_γ.

Pour trouver les valeurs des composantes suivant $M\alpha$ et $M\gamma$ de l'accélération du point M', on regardera le mouvement de ce point comme résultant d'un mouvement relatif par rapport aux axes en question et du mouvement d'entraînement de ces mêmes axes. Il faudra donc, d'après la théorie connue, calculer successivement l'accélération relative, l'accélération du point M', supposé fixe par rapport aux axes mobiles, et enfin l'accélération centrifuge composée.

L'accélération relative a évidemment pour composantes, suivant $M\alpha$ et $M\gamma$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ et $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$. Quant à l'accélération d'entraînement, ses composantes suivant la tangente et la normale à la trajectoire de M' dans le

mouvement d'entraînement sont $\frac{dV'_1}{dt}$ et $\frac{V'^2_1}{r'_1}$, V'_1 et r'_1 étant la vitesse de M′ dans ce mouvement et le rayon de courbure de la trajectoire dont il s'agit.

Mais le mouvement d'entraînement élémentaire est une rotation autour du centre instantané de rotation C de la courbe de repos apparent; la vitesse angulaire de cette rotation est $\frac{V}{\rho}$; la distance du point M′ à C est $\rho - \gamma$, puisque les quantités α et γ sont petites : on a donc

$$V'_1 = \frac{\rho - \gamma}{\rho} V.$$

On en déduit

$$\frac{dV'_1}{dt} = - V^2 \gamma \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds},$$

car γ est constant, puisqu'il s'agit du mouvement d'entraînement.

Quant à la composante normale $\frac{V'^2_1}{r'_1}$, il faut, pour l'obtenir, calculer r'_1.

Or, si l'on désigne par C′ le centre de courbure de la trajectoire d'entraînement en M′, on a, au degré d'approximation adopté,

$$r'_1 = \rho - \gamma + CC'$$

et

$$\frac{CC'}{CM'} = \frac{Cp}{M'M'_1 - Cp},$$

Cp étant perpendiculaire à CM′.

On trouve aisément

$$Cp = d\rho \frac{\alpha}{\rho - \gamma},$$

$$M'M'_1 = ds \frac{\rho - \gamma}{\rho};$$

on en conclut

$$CC' = \alpha \frac{d\rho}{ds},$$

et par suite

$$r'_1 = \rho \left(1 - \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{d\rho}{ds}\right).$$

De là résulte

$$\frac{V_1'^2}{r_1'} = \frac{V^2}{\rho}\left(1 - \frac{\gamma}{\rho}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho}\frac{d\rho}{ds}} = \frac{V^2}{\rho}\left(1 - \frac{\gamma}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho}\frac{d\rho}{ds}\right).$$

Les composantes de l'accélération d'entraînement suivant les axes $M\alpha$ et $M\gamma$ seront alors, en désignant par φ l'angle MCM',

$$\frac{dV_1'}{dt}\cos\varphi - \frac{V_1'^2}{r_1'}\sin\varphi = \frac{dV_1'}{dt} - \frac{V_1'^2}{r_1'}\frac{\alpha}{\rho - \gamma} = -V^2\gamma\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds} - \frac{V^2}{\rho^2}\alpha,$$

$$\frac{dV_1'}{dt}\sin\varphi + \frac{V_1'^2}{r_1'}\cos\varphi = \frac{dV_1'}{dt}\frac{\alpha}{\rho - \gamma} + \frac{V_1'^2}{r_1'} = \frac{V^2}{\rho} - \gamma\frac{V^2}{\rho^2} + \alpha V^2\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds}.$$

Quant aux composantes de l'accélération centrifuge composée suivant $M\alpha$ et $M\gamma$, elles sont évidemment $2\frac{V}{\rho}\frac{d\gamma}{dt}$ et $-2\frac{V}{\rho}\frac{d\alpha}{dt}$.

On a donc

$$\varphi_\alpha' = \frac{d^2\alpha}{dt^2} - 2\frac{V}{\rho}\frac{d\gamma}{dt} - \alpha\frac{V^2}{\rho^2} - \gamma V^2\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds},$$

$$\varphi_\gamma' = \frac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\frac{V}{\rho}\frac{d\alpha}{dt} - \gamma\frac{V^2}{\rho^2} + \alpha V^2\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds} + \frac{V^2}{\rho}.$$

En portant alors ces valeurs dans φ_t' et φ_n', remplaçant dans les équations (16) et (17) F_t', F_n', φ_t' et φ_n' par les expressions qui les représentent, tenant compte des équations du mouvement permanent de la corde

$$\frac{dT}{ds} + A = 0,$$

$$\frac{T}{\rho} + C - \frac{V^2}{\rho} = 0,$$

posant comme précédemment

$$A' = A + A_1,$$
$$C' = C + C_1,$$

et se rappelant les relations

$$S + Vt = \sigma,$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega,$$

$$T - V^2 = \mathcal{T},$$

on trouve, toutes simplifications faites,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = A_1 - \mathcal{T}\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},$$

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = C_1 + \frac{d(\mathcal{T}\omega)}{d\sigma} - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},$$

qui sont identiques à celles que nous avons obtenues comme cas particulier de la question générale.

Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles [1];

Par M. Ch. MÉRAY,

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1. J'ai fait connaître il y a quelques années [2] une méthode qui permet de traiter désormais les détails les plus minutieux et les plus variés de l'analyse des fonctions avec la rigueur et la simplicité qui jusqu'alors étaient restées l'apanage à peu près exclusif des Mathématiques élémentaires. Pour arriver à ce résultat, il m'a suffi d'abandonner les notions vagues et tout à fait insuffisantes qui sont restées trop longtemps les bases traditionnelles des raisonnements, et de revenir aux idées de Lagrange, c'est-à-dire de prendre *invariablement* pour point de départ cette propriété universelle et très nette des fonctions, d'être développables en séries *entières* (*P.* 34) [3] dans toutes

[1] Les énoncés des théorèmes contenus dans ce Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance du 8 février 1875; mais, au dernier moment, je m'étais aperçu que ma démonstration principale laissait échapper certains cas particuliers (qu'il serait assez long et peu utile de préciser ici) et j'avais renoncé à la publier, quoiqu'elle s'étendît alors bien au delà du cas d'un système d'équations aux dérivées partielles simultanées, ayant même plus d'une variable *principale*. Le texte actuel, qui semble ne laisser plus rien à désirer sous ce rapport, a été présenté à l'Académie le 5 août 1878.

[2] *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale.* Paris, août 1872.

[3] Je renverrai ainsi à l'Ouvrage cité, qui renferme sous la forme la mieux appropriée à mes recherches actuelles les propositions sur lesquelles j'aurai à m'appuyer. Un simple numéro se rapportera aux divisions du présent Mémoire.

les circonstances où les théorèmes généraux du Calcul infinitésimal leur sont applicables.

Une partie essentielle de ma tâche consistait donc à établir solidement la réalité de cette propriété fondamentale des fonctions. J'y suis parvenu, non plus en cherchant, comme on le faisait avant moi, à la déduire de quelque autre plus simple en apparence, telle que la continuité (il me semble absolument impossible de conduire à bonne fin une pareille entreprise), mais en la rattachant à la nature intime des opérations générales qui introduisent des fonctions nouvelles dans les spéculations mathématiques. J'ai pu ainsi, en combinant mes propres efforts avec les travaux antérieurs, traiter complètement la question pour la composition des fonctions, la formation des fonctions implicites, l'intégration des équations différentielles ordinaires et aux différentielles totales, simples ou simultanées; mais j'ai laissé entièrement de côté la théorie des équations aux dérivées partielles, nonobstant sa grande importance, car je ne possédais alors sur cette matière que des résultats incomplets et des démonstrations détournées.

Aujourd'hui, je puis combler cette lacune d'une manière satisfaisante, et je viens précisément établir un théorème tout à fait général, qui renferme dans un seul énoncé et dans une seule démonstration, les principes de la théorie de toutes les équations différentielles, dont celles connues sous le nom d'*équations aux dérivées partielles* ne forment qu'une classe très restreinte, comme on le verra ci-après.

Avant d'entrer en matière, il est juste de faire remarquer que ma démonstration de la convergence des intégrales a pour élément principal l'artifice si habilement utilisé par MM. Briot et Bouquet pour les équations différentielles ordinaires.

Définition d'un système d'équations différentielles immédiat.

2. On sait qu'un système quelconque d'équations différentielles simultanées se ramène au premier ordre, en ce sens que l'adjonction de fonctions inconnues auxiliaires permet toujours de former un certain système d'équations du premier ordre parmi les solutions duquel se trouvent celles du proposé (*P.* 231). Nous n'avons donc pas à nous oc-

cuper des systèmes d'ordres supérieurs; quant à ceux du premier ordre, il convient tout d'abord de porter exclusivement notre attention sur les systèmes *immédiats*, en qualifiant ainsi ceux qui satisfont aux deux conditions suivantes, et dont la théorie renferme celle de tous les autres.

I. *Les équations différentielles d'un système de cette espèce expriment immédiatement quelques dérivées (premières) des fonctions inconnues, en fonctions composées de ces mêmes fonctions, de leurs autres dérivées (premières) et des variables indépendantes.*

Ces fonctions composées (ou plutôt leurs composantes) sont ce que je nommerai les *seconds membres* des équations différentielles; les premiers ne contiennent, bien entendu, que les dérivées dont ces équations fournissent de telles expressions.

Il importe essentiellement de distinguer pour chaque fonction inconnue les variables indépendantes par rapport auxquelles sont prises les dérivées qui figurent dans les premiers membres des équations différentielles, de celles qui sont étrangères à la formation des dérivées dont il s'agit. Les premières seront pour nous les variables *principales* de la fonction considérée, les dernières ses variables *paramétriques.* Il va de soi qu'une même variable peut être à la fois principale pour quelque fonction et paramétrique pour quelque autre.

Il faut aussi donner des noms différents aux dérivées de tous ordres d'une même fonction inconnue, selon que les différentiations d'où elles proviennent intéressent ses *variables paramétriques seules,* ou bien, soit avec elles, soit sans elles, *quelque variable principale.* Ce seront respectivement les *dérivées paramétriques* et les *dérivées principales* de la fonction considérée.

D'après cela, *les équations d'un système immédiat expriment les dérivées principales premières des fonctions inconnues en fonctions composées des variables indépendantes, de ces mêmes fonctions inconnues, et de leurs dérivées paramétriques premières.*

Pour plus de clarté, il faut, par la pensée, distribuer les équations d'un système immédiat dans les compartiments d'un tableau rectangulaire divisé en cases de nombre égal au produit du nombre des fonctions inconnues par celui des variables indépendantes, cela en plaçant dans une même colonne toutes les équations dont les premiers membres

sont les dérivées d'une même fonction inconnue, et dans une même ligne toutes celles où ces premiers membres sont des dérivées prises par rapport à une même variable.

Le tableau du système peut contenir des cases vides réparties d'une manière quelconque ; pour une colonne donnée, elles sont en nombre égal à celui des variables paramétriques de la fonction correspondante. Quand le tableau ne contient aucune case vide, il n'y a point de variables paramétriques, les seconds membres ne contiennent aucune dérivée et l'on a des équations simultanées aux différentielles totales; c'est le cas traité au n° 139 de mon Ouvrage. S'il renferme une seule colonne n'ayant elle-même qu'une seule case pleine, le système immédiat proposé se réduit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre. S'il se réduisait à une seule ligne, on aurait un système d'équations différentielles ordinaires, complet ou incomplet (*P*. 233, 256), etc.

La notation générale d'un semblable système d'équations différentielles présente des difficultés matérielles qui me font renoncer à l'entreprendre; chacun d'ailleurs conçoit aisément ce dont il s'agit.

II. *Les seconds membres des équations d'une colonne quelconque ne contiennent aucune dérivée de toute fonction inconnue dont quelque variable principale serait paramétrique pour la fonction dont les équations considérées expriment les dérivées principales.*

Cette restriction est essentielle; sa nécessité apparaîtra d'elle-même quand nous aurons à établir les propositions fondamentales des n°s 4, 6, 7, 9 (*inf.*).

3. Les *intégrales* d'un ensemble quelconque d'équations différentielles simultanées, c'est-à-dire les fonctions dont la substitution transforme toutes ces équations en de simples identités entre les variables indépendantes, ne peuvent être conçues autrement qu'*olotropes* (*P*. 45) dans les limites des valeurs des variables où elles peuvent exister (*P*. 136). Celles d'un système immédiat se partagent en deux classes très distinctes :

I. Les intégrales *ordinaires*, caractérisées par cette circonstance que,

pour les valeurs correspondantes des variables, desdites intégrales et de leurs dérivées paramétriques premières, les seconds membres des équations différentielles deviennent toutes fonctions olotropes de ces trois sortes de quantités considérées un instant comme autant de variables indépendantes.

II. Les intégrales *singulières*, qui, dans les mêmes circonstances, *font au contraire cesser l'olotropie de quelque second membre.*

Nous étudierons d'abord celles de la première classe et, pour faciliter le langage, nous distribuerons en *genres* les dérivées principales (2) d'un même ordre n, d'un groupe déterminé d'intégrales simultanées, d'après les nombres relatifs de différentiations *principales* qui concourent à leur formation.

Les dérivées du *premier genre* seront bien de l'ordre total n par rapport à l'ensemble des variables indépendantes, mais du premier ordre seulement par rapport aux variables principales des fonctions correspondantes. Celles du *second genre* seront d'ordre 2 par rapport aux variables principales et d'ordre $n-2$ par rapport aux variables paramétriques, etc. Enfin le $n^{\text{ième}}$ genre renferme toutes les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ n'impliquant dans leur formation aucune différentiation *paramétrique*. Quelquefois aussi, nous considérerons les dérivées paramétriques comme formant les genres o de tous les ordres.

Pour une fonction, relativement à laquelle toutes les variables seraient principales, le genre n dans l'ordre n contiendrait seul quelque dérivée. Si, au contraire, toutes les variables étaient paramétriques pour la fonction considérée, toutes les dérivées seraient paramétriques et l'ordre n ne comprendrait que le genre o.

4. Théorème. — *Quand un système immédiat* (*a*) *possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, leurs dérivées principales d'ordre* n *et de genre* ν *sont indéfiniment exprimables en fonctions composées olotropes des variables, des intégrales considérées elles-mêmes, de leurs dérivées (quelconques) d'ordres inférieurs à* n *et de leurs dérivées d'ordre* n*, mais de genres inférieurs à* ν.

En effet, la substitution des intégrales dont l'existence est admise

dans une colonne quelconque de (a) transforme les équations qui la composent en autant d'identités entre les seules variables indépendantes; et les seconds membres de ces identités sont des fonctions composées olotropes des variables, des intégrales et de leurs dérivées paramétriques premières, tant par leurs composantes que par leurs fonctions simples $(P. 94)$, ce qui vérifie déjà notre théorème pour les dérivées principales du premier ordre.

Nous pouvons ensuite exécuter sur chacune des identités résultantes les $n-1$ différentiations capables de faire naître de leurs premiers membres les dérivées d'ordre n et de genre ν de l'intégrale correspondante u $(P. 96)$. Les seconds membres se compliqueront de dérivées de toutes les intégrales d'ordres inférieurs à n et de quelques-unes de l'ordre n; mais ces dernières, provenant exclusivement de la différentiation des dérivées premières qui figurent dans les seconds membres, sont paramétriques, ou bien principales, mais de genres inférieurs à ν. Car les dérivées premières en question sont essentiellement paramétriques, et leur présence dans les seconds membres des équations que l'on a différentiées exige que les variables qui sont paramétriques pour u le soient aussi pour les intégrales auxquelles elles appartiennent (2, II). Les dérivées d'ordre n qui en naissent impliquent donc nécessairement une différentiation paramétrique de plus, au moins, que les dérivées d'ordre n et de genre ν qui se sont formées dans les premiers membres; car toute différentiation qui est paramétrique pour ces dernières l'est aussi pour les premières, et les premières proviennent de dérivées principales, tandis que les autres proviennent de dérivées paramétriques.

Cela posé, les nouvelles identités fournies par ces $n-1$ différentiations donnent précisément aux dérivées d'ordre n et de genre ν de l'intégrale u la forme voulue par l'énoncé.

5. Nous désignerons par (A) les identités du premier ordre résultant de la substitution des intégrales dans le système immédiat proposé (a), et par (B) toutes celles subséquentes résultant de la différentiation indéfinie des premières et fournissant pour les dérivées principales des intégrales les expressions dont nous venons de parler.

En disposant ces relations par ordres et genres croissants, leurs seconds membres ne contiendront ainsi pour chacune, outre les

dérivées purement paramétriques, que des dérivées principales antérieurement obtenues, et l'élimination partielle ou totale de ces dernières fournira pour les dérivées principales d'ordres supérieurs une multitude de représentations analogues à celles que donnent les identités primitives (B). Mais nous n'avons à noter que celles dont il est question ci-après.

6. Théorème. — *Les dérivées principales d'ordre n d'un groupe d'intégrales ordinaires du système immédiat* (a) *s'expriment, sans distinction de genres, en fonctions composées olotropes, des variables indépendantes, des intégrales elles-mêmes et de leurs dérivées paramétriques d'ordres égaux ou inférieurs à n.*

Effectivement, dans le premier genre de l'ordre n, les expressions des dérivées principales données par les identités (B) renferment seulement des dérivées quelconques d'ordres inférieurs à n et des dérivées paramétriques $n^{\text{ièmes}}$ (4). Celles du second genre contiennent les mêmes dérivées et, en outre, celles du premier genre; ces dernières disparaîtront donc, si on leur substitue les fonctions composées qui leur sont équivalentes. Les deux premiers genres se trouvant ainsi débarrassés des dérivées principales $n^{\text{ièmes}}$, on passera au troisième, puis au quatrième, ..., puis enfin au $n^{\text{ième}}$ d'où l'on chassera successivement de la même manière toutes les dérivées principales d'ordre n.

Dans chaque ordre, cette opération ne laisse subsister, en fait de dérivées principales, que celles des ordres inférieurs. Si donc on reprend successivement tous les ordres pour chasser de chacun les dérivées principales des ordres inférieurs, toutes les dérivées principales des intégrales revêtiront la forme voulue.

Je désignerai par (C) l'ensemble des identités qui fournissent ces nouvelles représentations des dérivées principales d'ordres supérieurs. Quant aux expressions des dérivées principales premières, elles se tireront toujours des identités primitives (A).

7. Théorème. — *Soient x_0, y_0, z_0, ... des valeurs particulières attribuées aux variables indépendantes x, y, z, ... dans les limites d'olotropie d'un groupe donné d'intégrales ordinaires du système immédiat* (a); *si l'on connaît seulement les valeurs que prennent ces intégrales et leurs dérivées paramétriques de tous ordres pour $x = x_0$,*

$y = y_0$, $z = z_0$, ..., *on pourra calculer les valeurs correspondantes de leurs dérivées principales de tous ordres, et par suite construire les développements de ces intégrales en séries entières par rapport à* $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, ...

Effectivement, puisqu'il s'agit d'intégrales ordinaires, les valeurs en $x_0, y_0, z_0, \ldots$ des variables, des intégrales considérées et de leurs dérivées paramétriques premières tombent dans les limites d'olotropie des seconds membres des équations (a); on peut donc faire usage des relations (A), (C) pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ... Les formules $(A)_0$, $(C)_0$ qui en résultent donnent évidemment les valeurs correspondantes des dérivées principales exprimées seulement au moyen de celles des variables, des intégrales et de leurs dérivées paramétriques, c'est-à-dire au moyen de quantités qui par hypothèse sont connues.

8. Selon l'usage, nous nommerons valeurs *initiales* des variables indépendantes des valeurs particulières telles que $x_0, y_0, z_0, \ldots$, à partir desquelles on développe simultanément, par la formule de Taylor, des intégrales ordinaires du système (a). Nous donnerons la même qualification aux valeurs que prennent, pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ..., les intégrales et leurs dérivées de tous ordres.

Nous appellerons aussi *détermination initiale* de chaque intégrale la fonction de ses seules variables paramétriques, à laquelle elle se réduit quand ses variables principales prennent leurs valeurs initiales.

9. Théorème. — *On peut également former les développements d'un groupe d'intégrales ordinaires dont on connaît seulement les déterminations initiales.*

Effectivement, les valeurs initiales des dérivées de tous ordres des déterminations initiales de nos intégrales sont évidemment les mêmes que celles de ces intégrales et de leurs dérivées paramétriques de tous ordres. La connaissance des déterminations initiales équivaut donc à celle des quantités au moyen desquelles les formules $(A)_0$, $(C)_0$ du n° **7** permettent d'écrire les développements dont il s'agit.

10. Il faut noter qu'en appelant $(B)_0$ ce que deviennent les relations (B) du n° 5, pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ..., l'ensemble des formules $(A)_0$, $(B)_0$ équivaut tout à fait à celui des formules $(A)_0$, $(C)_0$

pour le calcul des valeurs initiales d'intégrales ordinaires à déterminations initiales connues. La seule différence consiste en ce que les premières ne peuvent être résolues que successivement par ordres et genres croissants, tandis que cette nécessité n'existe pas pour les seconds, où l'élimination des dérivées principales d'ordres et de genres moindres a précédé la réalisation de l'hypothèse particulière $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ...

La structure sensiblement moins compliquée des formules $(B)_0$ nous les fera préférer plus tard (n° **15**, IV, 4°, 5°, 6° *inf.*).

Systèmes immédiats passifs.

11. L'algorithme indéfini contenu dans les formules $(A)_0$, $(C)_0$ du n° **7** permet, comme nous venons de le voir, de reconstituer en quelque sorte, au moyen des équations différentielles (a), un groupe d'intégrales ordinaires dont on connaîtrait seulement les déterminations initiales.

Mais on peut évidemment l'appliquer aussi à un groupe de fonctions arbitrairement choisies, en même nombre que les fonctions inconnues du système (a) et ne dépendant respectivement que des variables paramétriques de ces dernières, *quand bien même on ignorerait que ces fonctions arbitraires sont les déterminations initiales de quelque groupe d'intégrales ordinaires.*

Effectivement, pour que les formules $(A)_0$, $(C)_0$ ne soient pas illusoires, il suffit simplement que chacune des fonctions arbitraires soit olotrope quand ses variables prennent les valeurs qu'elles ont dans la suite $x_0, y_0, z_0, \ldots$, et que l'attribution de ces valeurs initiales aux variables indépendantes, des valeurs initiales correspondantes des fonctions arbitraires et de leurs dérivées premières aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques premières, considérées un instant les unes et les autres comme autant d'autres variables indépendantes, rende tous olotropes les seconds membres des équations (a) [*P.* 96].

Cela posé, il y a lieu de se demander si, dans tous les cas, les développements obtenus de cette manière convergent et représentent des intégrales simultanées des équations différentielles proposées. La solution de cette question exige une distinction fort importante qu'il faut faire avant tout.

12. La construction de celle des relations (C) qui correspond à une dérivée principale déterminée d'une intégrale hypothétique présente deux phases : 1° la différentiation de l'une des équation (A) convenablement choisie, opération qui conduit à la relation correspondante dans (B); 2° l'élimination des dérivées principales de genres et d'ordres moindres qui figurent dans cette relation.

Quand les dérivées dont il s'agit est *simple*, c'est-à-dire quand les différentiations que comporte sa formation n'intéressent (avec les variables paramétriques) qu'*une seule* variable principale de l'intégrale hypothétique correspondante, le choix de l'équation (A) à différentier n'a rien d'arbitraire; on ne peut évidemment partir que de celle qui exprime la dérivée première de l'intégrale prise par rapport à la même variable principale.

Mais quand cette dérivée est *complexe*, c'est-à-dire quand elle provient de différentiations intéressant à la fois *plusieurs* variables principales distinctes, il est évident que ce choix peut se faire de plusieurs manières, et que plusieurs relations existent dans le groupe (B) pour cette même dérivée. On peut effectivement partir de l'une quelconque de celles des identités (A) qui ont pour premiers membres les dérivées premières, de l'intégrale hypothétique, prises par rapport à l'une ou à l'autre des variables principales dont il s'agit.

Toute dérivée complexe d'une intégrale hypothétique a donc déjà plusieurs formes primitives, c'est-à-dire de la nature de celles que donnent les relations (B), par cela seul que ces formes peuvent être tirées par différentiation de plusieurs des identités (A). Mais cette multiplicité s'accroît encore dans une mesure de plus en plus considérable par l'arbitraire qui préside au choix des expressions multiples à substituer aux dérivées complexes antérieures pour les éliminer. Quelquefois même, elle s'introduit pour la même cause, jusque dans les expressions définitives des dérivées simples dont les formes primitives peuvent contenir des dérivées complexes et partant susceptibles de plusieurs modes d'élimination.

Ainsi, en réalité, le groupe (C) peut contenir plus d'une relation pour une même dérivée principale, et par suite les formules $(C)_0$ donner de plusieurs manières la valeur initiale d'une semblable dérivée. A la vérité, cette particularité ne peut troubler en rien notre algorithme,

quand on part de fonctions arbitraires *que l'on sait être réellement les déterminations initiales de quelque groupe d'intégrales ordinaires;* car alors les diverses relations qui existent pour chaque dérivée s'accordent de toute nécessité, au moins *numériquement,* sinon algébriquement. Mais cette diversité combinée avec l'indétermination des fonctions arbitraires fait concevoir la possibilité du contraire. Quand cette circonstance se présente, l'existence des intégrales admettant pour déterminations initiales les fonctions arbitraires choisies devient absolument impossible. Car si deux des formules $(C)_0$ seulement donnent des résultats différents pour la valeur initiale d'une même dérivée principale, le groupe des équations proposées (a), dont la différentiation et la transformation ont engendré celle des deux formules à laquelle on n'aura pas emprunté la valeur initiale adoptée, ne sera certainement pas satisfait.

L'équivalence *numérique* qui est ainsi préalablement nécessaire entre toutes celles des formules $(C)_0$ qui sont relatives à une même dérivée peut résulter de deux causes bien différentes : 1° pour certains systèmes immédiats, d'un choix de fonctions arbitraires spécialement appropriées à leur nature et aux valeurs initiales des variables; 2° pour d'autres systèmes, de leur constitution intime qui, à elle seule et indépendamment de toute hypothèse sur la nature des fonctions arbitraires et sur les valeurs initiales des variables, assure l'identité *algébrique* des relations (C) ayant pour formes initiales les formules $(C)_0$ dont il s'agit, et par suite la coïncidence numérique de ces dernières.

Je nommerai *passifs* les systèmes immédiats de la seconde classe, qui sont de beaucoup les plus importants à considérer. La proposition suivante fournit le moyen de les distinguer des autres.

15. Théorème. — *Pour que le système immédiat* (a) *soit passif, il est nécessaire et suffisant que les deux expressions fournies par les relations* (C) *pour toute dérivée complexe seconde d'une fonction inconnue quelconque soient, dans tous les cas, des fonctions identiquement égales des variables* $x, y, z, \ldots,$ *des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques premières et secondes, ces trois dernières sortes de quantités étant, bien entendu, considérées pour un moment comme autant d'autres variables indépendantes.*

En effet, dans les formules $(C)_0$ les valeurs initiales des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques entrent exactement de la même manière que les valeurs générales de ces trois espèces de quantités dans les relations correspondantes de (C). Donc, en particulier, comme les deux valeurs initiales d'une même dérivée complexe seconde doivent être numériquement égales dans tous les cas, il faut bien que ces deux expressions générales, fournies par les relations (C) en fonction des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques des deux premiers ordres, soient égales entre elles, quelles que soient les valeurs particulières attribuées à ces quantités indépendamment les unes des autres, c'est-à-dire identiquement.

Nous prouverons maintenant que cette condition est suffisante, en montrant qu'elle entraîne entre les expressions multiples de toutes les autres dérivées l'identité qu'elle exprime pour les dérivées complexes du second ordre.

I. *Dans le calcul de chacune des identités* (B), *les différentiations à exécuter sur celle des identités* (A) *d'où elle se tire peuvent être interverties d'une manière quelconque.* Ce premier point est évident,

II. Par conséquent, *deux expressions transitoires fournies par les relations* (B) *pour une même dérivée complexe quelconque peuvent être déduites, par des différentiations identiques, de deux semblables choisies convenablement parmi celles que les mêmes relations* (B) *fournissent pour la dérivée complexe du second ordre dont la proposée peut être considérée comme étant une dérivée.*

III. *Quand deux expressions* $F_1(U_1, V_1, \ldots)$, $F_2(U_2, V_2, \ldots)$ *se réduisent à une même fonction composée* $f(u, v, \ldots)$ *des fonctions simples* $u, v, \ldots$, *par la substitution à* $U_1, V_1, \ldots$, *d'une part, à* $U_2, V_2, \ldots$, *d'autre part, de certaines fonctions composées* $\upsilon_1(u, v, \ldots)$, $\varphi_1(u, v, \ldots), \ldots$, $\upsilon_2(u, v, \ldots)$, $\varphi_2(u, v, \ldots), \ldots$, *des mêmes fonctions simples, les dérivées semblables de* F_1, F_2 *prises par rapport aux variables indépendantes, et exprimées selon les règles de la différentiation des fonctions composées au moyen des dérivées indéterminées de* $U_1, V_1, \ldots$, $U_2, V_2, \ldots$ *deviennent respectivement aussi identiques entre elles* (*et*

à la dérivée semblable de f) par la substitution de v_1, φ_1, ..., v_2, φ_2, ... *et de leurs dérivées, à* U_1, V_1, ..., U_2, V_2, ..., *et à leurs dérivées.*

C'est une conséquence évidente de la loi de formation des dérivées des fonctions composées.

IV. *Si notre proposition est vraie jusqu'au genre* ν *de l'ordre* n *inclusivement, elle l'est aussi pour les dérivées complexes de genre* $\nu+1$ $(\leq n)$ *du même ordre.*

Soient, en effet, Δ_1, Δ_2 deux expressions fournies pour une même dérivée complexe d'ordre n et de genre $\nu+1$ par les relations (B), et δ_1, δ_2 celles semblables dans le second ordre, d'où on peut les tirer par des différentiations identiques (II) (différentiations en nombre évidemment égal à $n-2$). Remplaçons en outre par autant de lettres différentes, savoir U_1, V_1, ... pour δ_1, U_2, V_2, ... pour δ_2, les variables, les fonctions inconnues et leurs dérivées figurant dans ces deux expressions. Δ_1 et Δ_2 se présenteront immédiatement sous forme d'expressions renfermant seulement, l'une U_1, V_1, ... et leurs dérivées (encore indéterminées), l'autre U_2, V_2, ... et leurs dérivées (également indéterminées). Mais, comme δ_1, δ_2 deviennent identiques par hypothèse quand on substitue à U_1, V_1, ... d'une part, à U_2, V_2, ... d'autre part, leurs expressions en u, v, ..., lettres par lesquelles nous représenterons un instant les variables indépendantes x, y, z, ..., les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques des deux premiers ordres, Δ_1 et Δ_2, s'identifieront aussi par la même substitution étendue aux dérivées qui s'y sont introduites (III).

Ainsi Δ_1, Δ_2 sont maintenant des expressions identiques en u, v, ... et en quelques-unes de leurs dérivées; elles le seront donc encore après la substitution finale à ces dernières quantités de leurs expressions au moyen des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées *paramétriques* d'ordres égaux à n ou moindres. Car les seules quantités chassées par cette substitution, qui soient susceptibles d'expressions multiples, sont des dérivées principales d'ordres et de genres au plus égaux à n et à ν, dont, par hypothèse, les expressions de toutes origines sont identiques.

V. *Quand la proposition est vraie jusqu'à la même limite que ci-dessus,*

elle l'est aussi pour les dérivées simples de genre $\nu+1$ et d'ordre n, si $\nu+1 \leqq n$, et pour celles du premier genre de l'ordre $n+1$, si $\nu = n$.

Effectivement, nous avons fait remarquer déjà (**12**) que les relations (B) ne peuvent donner plus d'une représentation pour chaque dérivée simple, et que la multiplicité des relations (C), se rapportant à une même dérivée de cette espèce, ne pouvait provenir que de la diversité des formes fournies par les mêmes relations, pour les dérivées de genres et d'ordres moindres, qu'il faut en éliminer. L'individualité constante que notre hypothèse attribue aux dérivées d'ordres et de genres non supérieurs à n et à ν, qui sont seules à chasser des expressions primitives des dérivées simples d'ordre n et de genre $\nu+1$ ou d'ordre $n+1$ et de genre 1, assure donc celle de ces dernières.

VI. Notre proposition est vraie d'elle-même pour les dérivées principales premières et pour celles qui appartiennent au premier genre du second ordre; elle est vraie par hypothèse pour les dérivées complexes du second ordre (elles appartiennent au genre 2) : donc *elle est générale*.

Car l'emploi alternatif des lemmes (IV) et (V) permet de l'étendre successivement aux dérivées simples du genre 2 du second ordre, à celles du genre 1 du troisième ordre (les premiers genres ne contiennent aucune dérivée complexe), aux dérivées complexes, puis aux dérivées simples du second genre dans le troisième ordre, ... etc., et indéfiniment, en passant toujours d'un genre au suivant dans le même ordre, ou au premier de l'ordre suivant, quand le genre considéré est le dernier de son ordre.

14. La passivité d'un système immédiat est ainsi subordonnée à l'existence de certaines identités entre des expressions impliquant les variables, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques des deux premiers ordres, expressions dont les rapports avec les seconds membres des équations différentielles données sont établis par les considérations des nos **6** et **12**; je nommerai ces identités les *conditions de passivité* [1] du système de ces équations.

---

[1] Cette dénomination me semble préférable à celle de *conditions d'intégrabilité*,

Comme chaque dérivée complexe seconde en donne une, leur nombre est égal à celui de ces dérivées, c'est-à-dire à la somme des nombres qui pour chaque fonction inconnue expriment combien ses variables principales offrent des combinaisons deux à deux.

Pour des nombres donnés de variables indépendantes et de fonctions inconnues, les conditions de passivité sont en nombre maximum quand les variables sont toutes principales pour chacune des fonctions, c'est-à-dire quand les équations proposées sont aux différentielles totales (*P.* 259).

Le système proposé est au contraire passif sans conditions, quand chaque fonction n'a pas plus d'une variable principale, ce qui arrive par exemple pour un système d'équations différentielles ordinaires et pour une seule équation aux dérivées partielles.

15. Voici enfin la proposition qui assure l'existence des intégrales ordinaires d'un système immédiat passif :

Théorème. — *Considérons un instant dans le système (a) les variables, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques premières, comme autant de variables indépendantes distinctes, représentées graphiquement, selon l'usage, par des points en même nombre rapportés chacun dans son plan à un couple d'axes rectangulaires.*

Si, pour toutes les valeurs de ces quantités tombant à l'intérieur d'aires limitatives (S) *données dans les plans coordonnés, les seconds membres des équations (a) en sont fonctions olotropes, et si les conditions de passivité sont satisfaites* (**14**), *ces équations admettent en* x_0, y_0, z_0, ..., *valeurs initiales des variables prises à volonté dans celles des aires* (S) *qui leur correspondent, un groupe* (*unique*) *d'intégrales ordinaires* (*olotropes*) *ayant pour déterminations initiales des fonctions olotropes de leurs variables paramétriques, choisies arbitrairement sous la simple condition que leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées premières tombent dans celles des aires* (S) *qui sont relatives aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques premières.*

---

parce que des intégrales peuvent exister sans que ces conditions soient satisfaites. C'est ce que j'ai déjà fait voir pour les équations différentielles totales (*P.* 263).

Pour démontrer ce théorème, il suffit évidemment d'établir les deux points suivants :

1° *Les séries entières en* $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, ..., *construites à l'aide des formules indéfinies* $(A)_0$, $(C)_0$ *du* n° **7** *sont toutes convergentes pour des modules suffisamment petits de ces différences.*

2° *Les sommes de ces séries sont effectivement des intégrales des équations différentielles proposées* (a).

La vérification du second point ne présente aucune difficulté, le premier une fois acquis; car les formules $(A)_0$, $(B)_0$ d'où peuvent aussi être tirés les coefficients inconnus des divers termes de nos séries (**10**) expriment évidemment qu'après la substitution des sommes de celles-ci dans le système proposé (a), les deux membres de chaque équation différentielle deviennent des fonctions de $x, y, z, \ldots$, égales, elles et toutes leurs dérivées, pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, ..., c'est-à-dire des fonctions des seules variables indépendantes, identiquement égales l'une à l'autre (*P.* 73).

Nous n'avons plus à nous occuper que du premier point, c'est-à-dire de la convergence des développements des intégrales; je raisonnerai comme il suit, en rappelant d'abord certains principes particuliers sur lesquels j'aurai à m'appuyer.

I. *Soient* 1° $f(u, x, y, z, \ldots)$ *une fonction olotrope dans des aires données avec des olomètres* (*P.* 45) *supérieurs à la quantité positive* r; 2° M *une limite supérieure du module de cette fonction, tant dans ces aires que dans les espaces extérieurs contigus dont tous les points se trouvent, relativement à quelques points des aires considérées, à des distances comprises entre* r *et les olomètres correspondants* (*P.* 47, 3° *et* 65); 3° g, h *des quantités positives quelconques supérieures à* $\frac{1}{r}$; 4° p, q *des entiers positifs quelconques.*

En u_0, x_0, y_0, z_0, ..., *valeurs particulières des variables prises à volonté dans les aires en question, le module d'une dérivée d'ordre quelconque de* $f(u, x, y, z, \ldots)$ *est inférieur à la valeur (évidemment positive) que prend en* u_0, x_0, y_0, z_0, ... *la dérivée semblable de la fonction*

$$(1)\quad M : \{[1 - g(u - u_0)]^p [1 - h(x - x_0 + y - y_0 + z - z_0 + \ldots)]^q\}.$$

Cette proposition est contenue dans celle du n° 137 de mon Ouvrage, qui est elle-même l'extension d'une autre due à Cauchy.

II. *L'équation*

$$\psi^s = 1 + \tau, \tag{2}$$

s désignant un entier quelconque, est satisfaite identiquement par la substitution à ψ *d'une certaine fonction de* τ, $\psi_s(\tau)$, *olotrope en* $\tau = 0$, *s'y réduisant à* 1, *et y ayant un olomètre égal à* 1 (*P.* 138).

III. *En conservant aux lettres* p, q *les mêmes significations que ci-dessus* (I), *en supposant* $q > 1$, *et en appelant* μ, γ, η *des constantes positives quelconques, l'équation différentielle*

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu}{(1 - \gamma\omega)^p (1 - \eta t)^q} \tag{3}$$

admet pour ω *une intégrale* (5), *fonction de* t, *qui est olotrope et s'annule pour* $t = 0$, *et dont les dérivées y prennent toutes des valeurs positives.*

La fonction composée de t,

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\psi_{p+1}\left\{\frac{(p+1)\gamma}{(q-1)\eta}\mu\left[1 - \frac{1}{(1-\eta t)^{q-1}}\right]\right\}, \tag{4}$$

où ψ_{p+1} désigne la détermination de la fonction olotrope $\psi_s(\tau)$ du lemme précédent qui correspond à $s = p + 1$, est évidemment olotrope au point $t = 0$ en vertu de la théorie des fonctions composées (*P.* 94), puisque la fonction simple

$$\frac{(p+1)\gamma}{(q-1)\eta}\mu\left[1 - \frac{1}{(1-\eta t)^{q-1}}\right]$$

est olotrope et s'annule en $t = 0$, et que la composante $\psi_{p+1}(\tau)$ est olotrope en $\tau = 0$.

Cette fonction composée, qui s'annule évidemment avec t, satisfait identiquement à l'équation (3); car, en la désignant par ω, on trouve

immédiatement

$$1 - \gamma\omega = \psi_{p+1}\left\{\frac{p+1}{q-1}\frac{\gamma}{\eta}\mu\left[1 - \frac{1}{(1-\eta t)^{q-1}}\right]\right\},$$

d'où, conformément à la définition de ψ_{p+1},

$$(1 - \gamma\omega)^{p+1} = 1 + \frac{p+1}{q-1}\frac{\gamma}{\eta}\mu\left[1 - \frac{1}{(1-\eta t)^{q-1}}\right],$$

puis, en différentiant par rapport à t,

$$(1 - \gamma\omega)^p \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu}{(1-\eta t)^q},$$

relation équivalente à l'équation différentielle proposée.

Maintenant, en vertu du théorème du n° 4 appliqué à l'équation différentielle (3), la dérivée d'ordre $n+1$ de la fonction $\omega(t)$ ainsi déterminée s'exprime au moyen de t, ω, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $\cdots$, $\frac{d^n\omega}{dt^n}$ seulement; et, en vertu de la théorie des fonctions composées, cette expression est un polynôme entier en $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $\cdots$, $\frac{d^n\omega}{dt^n}$, dont les coefficients sont les produits, par certains facteurs numériques, de quelques dérivées partielles du second membre de l'équation (3), où t, ω seraient considérées un instant comme deux variables indépendantes distinctes; et les termes de ce polynôme sont tous précédés du signe $+$.

Pour $t = 0$, avons-nous dit, on a $\omega = 0$, et pour $t = \omega = 0$ les dérivées partielles du second membre de (3) sont évidemment positives. Donc il est certain que $\frac{d^{n+1}\omega}{dt^{n+1}}$ est aussi positive pour $t = 0$, si $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, $\cdots$, $\frac{d^n\omega}{dt^n}$ le sont toutes pour cette même valeur de t, et par suite que les dérivées de $\omega(t)$ sont indéfiniment positives pour $t = 0$, comme nous voulons le constater, si la première seulement jouit de cette propriété. Or, c'est ce qui a lieu, puisque l'équation (3) donne immédiatement $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0 = \mu$ à cause de $\omega(0) = 0$.

Cette propriété des valeurs initiales des dérivées de $\omega(t)$ se déduirait

facilement encore de l'étude directe de l'expression (4), faite en tenant compte de la nature spéciale de la fonction ψ_{p+1} (II).

Pour limite inférieure de l'olomètre de $\omega(t)$ en $t=0$, on peut prendre toute quantité positive ρ telle que, pour mod. $t<\rho$, on ait

$$\text{mod.}\left\{\frac{(p+1)q}{(q-1)\eta}\mu\left[1-\frac{1}{(1-\eta t)^{q-1}}\right]\right\}<1.$$

Mais il nous est inutile de pousser cette recherche jusqu'au bout.

IV. *La convergence des développements des intégrales des équations différentielles proposées* (a) *a lieu conformément à l'énoncé général ci-dessus formulé, quand ces équations sont linéaires par rapport aux dérivées paramétriques des fonctions inconnues.*

1° Pour fixer les idées, et pour ne pas obscurcir le raisonnement par les signes très compliqués qui seraient nécessaires à la notation générale du système (a), je considérerai seulement un cas particulier : il suffira amplement à montrer comment la démonstration doit se faire dans tout autre cas.

A cet effet, je prendrai un système (α) renfermant seulement deux variables indépendantes x, y et huit fonctions inconnues

$$u_{00},\ v_{00},\ u_{01},\ v_{01},\ u_{10},\ v_{10},\ u_{11},\ v_{11}.$$

Pour les deux premières de ces fonctions, x, y seront toutes deux paramétriques; pour les deux suivantes, x sera paramétrique et y principale; pour les deux suivantes, x sera principale et y paramétrique; pour les deux dernières enfin, les deux variables seront principales. Aux termes de la définition générale (2), le système immédiat (α) ne contient aucune équation différentielle ayant pour premier membre l'une ou l'autre des dérivées soit de u_{00}, soit de v_{00}; mais il s'y trouve deux équations exprimant (linéairement) $\frac{du_{01}}{dy}$, $\frac{dv_{01}}{dy}$ au moyen de

$$\frac{du_{00}}{dx},\ \frac{du_{00}}{dy},\ \frac{dv_{00}}{dx},\ \frac{dv_{00}}{dy},\ \frac{du_{01}}{dx},\ \frac{dv_{01}}{dx};$$

deux autres exprimant (de même) $\frac{du_{10}}{dx}$, $\frac{dv_{10}}{dx}$ au moyen de

$$\frac{du_{00}}{dx},\ \frac{du_{00}}{dy},\ \frac{dv_{00}}{dx},\ \frac{dv_{00}}{dy},\ \frac{du_{10}}{dy},\ \frac{dv_{10}}{dy},$$

et quatre autres enfin exprimant (de même) $\frac{du_{11}}{dx}$, $\frac{du_{11}}{dy}$, $\frac{dv_{11}}{dx}$, $\frac{dv_{11}}{dy}$ au moyen de

$$\frac{du_{00}}{dx},\ \frac{du_{00}}{dy},\ \frac{dv_{00}}{dx},\ \frac{dv_{00}}{dy},\ \frac{du_{01}}{dx},\ \frac{dv_{01}}{dx},\ \frac{du_{10}}{dy},\ \frac{dv_{10}}{dy}.$$

Dans toutes les expressions linéaires qui constituent les seconds membres de nos huit équations, les coefficients de ces huit dérivées paramétriques sont des fonctions de x, y, u_{00}, ..., v_{11} qui, en y considérant un instant ces dix quantités comme des variables indépendantes, sont olotropes dans autant d'aires données (Σ).

J'appellerai r, M deux quantités positives, la première inférieure à tous les olomètres de ces fonctions dans les dix espaces (Σ), la seconde supérieure à la fois à 1 et aux modules de toutes les valeurs que peuvent acquérir les fonctions dont il s'agit, tant dans les aires (Σ) que dans les espaces extérieurs contigus dont les points sont séparés de quelques points de ces aires par des distances supérieures à r, mais inférieures aux olomètres ci-dessus mentionnés.

Cela posé, je poursuis ma démonstration.

2° *En posant, pour abréger,*

$$\begin{aligned}\mathrm{M}:&\left\{\left[1-\frac{1}{r}(\Upsilon_{00}+\Phi_{00}+\Upsilon_{01}+\Phi_{01}+\Upsilon_{10}+\Phi_{10}+\Upsilon_{11}+\Phi_{11})\right]\left[1-\frac{1}{r}(x+y)\right]\right\}\\ &=\Theta(x, y, \Upsilon_{00}, \Phi_{00}, \Upsilon_{01}, \Phi_{01}, \Upsilon_{10}, \Phi_{10}, \Upsilon_{11}, \Phi_{11}),\end{aligned}$$

le système (β), formé par les seize équations différentielles totales qui égalent à $9\Theta^2$ (le nombre 9 représente ici le nombre total des dérivées paramétriques premières de u_{00}, ..., v_{11} augmenté de 1) les seize dérivées premières par rapport à x et à y des huit fonctions inconnues Υ_{00}, ..., Φ_{11}, admet un système d'intégrales qui, en $x=y=0$, sont fonctions olotropes de x, y, s'annulent et ont des dérivées de tous ordres essentiellement positives.

On obtient évidemment ces intégrales en faisant, dans l'équation (3),

$$\mu = 9M^2, \quad \gamma = \frac{8}{r}, \quad \eta = \frac{1}{r}, \quad p = q = 2,$$

en prenant l'intégrale $\Omega(t)$ de cette équation déterminée par la condition initiale $\Omega(0) = 0$, et en répétant huit fois la fonction $\Omega(x+y)$.

3° Étant donné un système immédiat quelconque d'équations différentielles (passif ou non), et des fonctions arbitraires des variables convenablement choisies, on peut, avons-nous dit, construire, à l'aide des formules $(A)_0$, $(B)_0$ du n° **10**, des séries entières dont les sommes coïncident avec les intégrales qui ont ces fonctions arbitraires pour déterminations initiales, quand il existe toutefois de semblables intégrales. Puis nous avons remarqué (**12**) que ces formules [au fond elles sont équivalentes aux formules $(A)_0$, $(C)_0$] donnent de plusieurs manières les valeurs initiales des dérivées complexes des fonctions inconnues.

Chaque fois que la marche du calcul amènera une nouvelle dérivée complexe, choisissons arbitrairement pour sa valeur initiale une des quantités fournies par nos formules, que ces quantités soient égales ou ne le soient pas; mais, ce choix fait une première fois, *adoptons définitivement cette valeur pour l'application des formules subséquentes au calcul des dérivées d'ordres supérieurs*. Il est clair que les séries formées de cette manière ne donneront pas en général des intégrales du système quelconque dont nous parlons en ce moment (**12**); mais, quand elles seront convergentes, nous nommerons leurs sommes des *intégrales fictives* du système en question, *satisfaisant aux conditions initiales données*.

Ces intégrales fictives sont ainsi des fonctions olotropes dont les valeurs *initiales*, à elles et à toutes leurs dérivées, sont fournies, non par la totalité des formules $(A)_0$, $(B)_0$, *mais par un groupe partiel indéfini de ces formules, qui, à lui seul, suffit exactement à la construction des intégrales véritables de mêmes déterminations initiales, quand il y en a.* Dans ce dernier cas, nos intégrales fictives deviennent évidemment des intégrales véritables.

4° Appelons $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$ *huit nouvelles fonctions inconnues de* x, y ; Θ' *l'expression* $\Theta(x, y, \Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11})$, *et considérons le système*

immédiat (β') *semblable à* (β), *formé par les seize équations qui égalent*

$$\frac{d\Upsilon'_{00}}{dx},\quad \frac{d\Upsilon'_{00}}{dy},\quad \frac{d\Phi'_{00}}{dx},\quad \frac{d\Phi'_{00}}{dy}\quad \text{à}\quad \Theta'.$$

$$\frac{d\Upsilon'_{01}}{dx},\quad \frac{d\Phi'_{01}}{dx}\quad \text{à}\quad \Theta',\quad \text{et}\quad \frac{d\Upsilon'_{01}}{dy},\quad \frac{d\Phi'_{01}}{dy}\quad \text{à}\quad 7\Theta'^2,$$

$$\frac{d\Upsilon'_{10}}{dx},\quad \frac{d\Phi'_{10}}{dx}\quad \text{à}\quad 7\Theta'^2,\quad \text{et}\quad \frac{d\Upsilon'_{10}}{dy},\quad \frac{d\Phi'_{10}}{dy}\quad \text{à}\quad \Theta',$$

$$\frac{d\Upsilon'_{11}}{dx},\quad \frac{d\Upsilon'_{11}}{dy},\quad \frac{d\Phi'_{11}}{dx},\quad \frac{d\Phi'_{11}}{dy}\quad \text{à}\quad 9\Theta'^2$$

(*les coefficients* 7, 7, 9 *ont été pris égaux respectivement aux nombres totaux des dérivées paramétriques premières de* u_{00}, v_{00}, u_{01}, v_{01}, *de* u_{00}, v_{00}, u_{10}, v_{10}, *de* u_{00}, v_{00}, u_{01}, v_{01}, u_{10}, v_{10}, *tous augmentés de* 1).

Le système (β') *ainsi défini admet des intégrales fictives* (3°) *satisfaisant aux conditions initiales* $\Upsilon'_{00} = \ldots = \Phi'_{11} = 0$ *pour* $x = y = 0$, *dont les diverses dérivées ont des valeurs initiales toutes positives, et inférieures ou au plus égales à celles des dérivées semblables des intégrales correspondantes du système* (β) (2°).

Il résulte de l'hypothèse $M > 1$ et de la nature relative tant des fonctions Θ, Θ' que des équations (β), (β'), que, pour

$$x = y = \Upsilon'_{00} = \ldots = \Phi'_{11} = 0,$$

les dérivées partielles de tous ordres des seconds membres de (β') sont essentiellement positives et inférieures, ou égales au plus, aux valeurs prises en $x = y = \Upsilon_{00} = \ldots = \Phi_{11} = 0$ par les dérivées semblables des seconds membres des équations correspondantes dans (β).

Cela posé, le point en question devient évident, si l'on applique à la recherche successive des valeurs initiales des dérivées des intégrales $\Upsilon_{00}, \ldots, \Phi_{11}$ du système (β) celles des formules $(A)_0$ $(B)_0$ que l'on aura employées pour calculer les valeurs initiales des dérivées semblables des intégrales fictives $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$ du système (β').

5° *Appelons* $\upsilon_{00}, \ldots, \varphi_{11}$ *huit autres fonctions inconnues, et posons* $\Theta'(x, y, \upsilon_{00}, \ldots, \varphi_{11}) = \theta$: *le système immédiat* (α'), *que forment huit équations différentielles égalant*

$$\frac{d\upsilon_{01}}{dy}\quad \text{et}\quad \frac{d\varphi_{01}}{dy}$$

à

$$\theta^2 + \theta\frac{dv_{00}}{dx} + \theta\frac{dv_{00}}{dy} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dx} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dy} + \theta\frac{dv_{01}}{dx} + \theta\frac{d\varphi_{01}}{dx},$$

$$\frac{dv_{10}}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi_{10}}{dx}$$

à

$$\theta^2 + \theta\frac{dv_{00}}{dx} + \theta\frac{dv_{00}}{dy} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dx} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dy} + \theta\frac{dv_{10}}{dy} + \theta\frac{d\varphi_{10}}{dy},$$

$$\frac{dv_{11}}{dx}, \quad \frac{dv_{11}}{dy}, \quad \frac{d\varphi_{11}}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi_{11}}{dy}$$

à

$$\theta^2 + \theta\frac{dv_{00}}{dx} + \theta\frac{dv_{00}}{dy} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dx} + \theta\frac{d\varphi_{00}}{dy} + \theta\frac{dv_{01}}{dx} + \theta\frac{d\varphi_{01}}{dx} + \theta\frac{dv_{10}}{dy} + \theta\frac{d\varphi_{10}}{dy},$$

admet des intégrales fictives qui, elles et leurs dérivées de tous ordres, ont en $x=y=0$, des valeurs positives inférieures ou égales aux valeurs prises en $x=y=0$ par les dérivées semblables des intégrales de mêmes noms du système (β).

Dans les formules $(A)_0$, $(B)_0$ qui donnent les valeurs initiales des intégrales fictives du système (β'), effaçons toutes celles relatives aux dérivées complexes des fonctions Υ'_{01}, Φ'_{01} et Υ'_{10}, Φ'_{10} qui proviennent, les premières de la différentiation des équations

$$\frac{d\Upsilon'_{01}}{dx} = \Theta', \quad \frac{d\Phi'_{01}}{dx} = \Theta',$$

les dernières de celle des équations

$$\frac{d\Upsilon'_{10}}{dy} = \Theta', \quad \frac{d\Phi'_{10}}{dy} = \Theta'.$$

Les relations non effacées suffisent au calcul de certaines intégrales fictives $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$ du système (β') s'annulant toutes pour $x=y=0$, et, en posant

$$\begin{aligned}
\Upsilon'_{00}(x, y) &= v^0_{00}(x, y), & \Phi'_{00}(x, y) &= \varphi^0_{00}(x, y),\\
\Upsilon'_{01}(x, 0) &= v^0_{01}(x), & \Phi'_{01}(x, 0) &= \varphi^0_{01}(x),\\
\Upsilon'_{10}(0, y) &= v^0_{10}(y), & \Phi'_{10}(0, y) &= \varphi^0_{10}(y),
\end{aligned}$$

on retrouvera les mêmes fonctions $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$ par l'intégration fictive du système (α') opérée en prenant pour conditions initiales

$$\begin{array}{lll} v_{00} = v^0_{00}(x, y), & \varphi_{00} = \varphi^0_{00}(x, y), & \\ v_{01} = v^0_{01}(x), & \varphi_{01} = \varphi^0_{01}(x), & \text{pour } y = 0, \\ v_{10} = v^0_{10}(y), & \varphi_{10} = \varphi^0_{10}(y) & \text{pour } x = 0, \\ v_{11} = 0, & \varphi_{11} = 0, & \text{pour } x = y = 0. \end{array}$$

Effectivement, si l'on adjoint aux équations (α') les huit équations (α'') qui égalent à θ les dérivées paramétriques premières de v_{00}, $\ldots, \varphi_{11}$, on formera un système, non plus immédiat il est vrai, mais équivalent au système (β') en ce sens qu'il donnera encore les intégrales fictives $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$, par l'exécution faite parallèlement, de l'algorithme restreint à l'aide duquel nous avons tiré ces fonctions des équations (β'). Cela résulte de ce que, sauf la notation, les équations (α'') sont identiques aux équations semblablement placées dans (β') et que les équations (α') ont été déduites de celles de mêmes rangs dans (β') en substituant quelquefois à θ, second membre commun des équations (α''), tel ou tel des premiers membres de ces mêmes équations.

Ainsi, au point de vue de l'intégration fictive, l'ensemble des équations (α'), (α'') équivaut au système (β'). Mais il est évident que les conditions initiales ci-dessus posées équivalent aux équations (α''). Donc le système (α') complété par les conditions initiales dont il s'agit a bien pour intégrales fictives les fonctions $\Upsilon'_{00}, \ldots, \Phi'_{11}$.

On notera que, sauf la passivité, le système (α') est semblable au système (α) (1°), en ce sens qu'il est comme lui linéaire, que les équations sont en même nombre, et que les mêmes variables sont soit paramétriques, soit principales, pour les fonctions inconnues correspondantes. On notera également qu'en $x = y = 0$ les intégrales fictives que nous venons de lui trouver ont des olomètres au moins égaux à ceux de la fonction $\Omega(x+y)$, valeur commune des intégrales du système (β) (2°).

6° *La proposition énoncée au commencement du présent paragraphe* (IV) *est vraie pour le système* (α) *défini à l'alinéa* (1°) *si, les valeurs*

$x = y = u_{00} = \ldots = v_{11} = 0$ *tombant dans les aires* (Σ), *les conditions initiales imposées sont*

$$\begin{array}{llll} u_{00} = v_{00} = 0, & \textit{quels que soient} & x, y, & \\ u_{01} = v_{01} = 0, & \textit{quel que soit} & x, & \textit{pour } y = 0, \\ u_{10} = v_{10} = 0, & \textit{quel que soit} & y, & \textit{pour } x = 0, \\ u_{11} = v_{11} = 0, & & & \textit{pour } x = y = 0. \end{array}$$

Considérons en effet une des relations $(A)_0$, $(B)_0$ donnant la valeur initiale d'une dérivée principale d'ordre quelconque de l'une ou de l'autre des intégrales fictives $\upsilon_{00}, \ldots, \varphi_{11}$ du système (α') (5°); son second membre, qui constitue l'expression de cette dérivée, est un polynôme à termes tous positifs ayant pour facteurs quatre sortes de quantités, savoir : certains nombres entiers, les valeurs initiales (positives) de quelques dérivées partielles par rapport à x, y, $\upsilon_{00}, \ldots, \varphi_{11}$ des coefficients (ϑ^2 ou ϑ) des dérivées paramétriques entrant dans les seconds membres des équations (α'), celles de quelques dérivées paramétriques de $\upsilon_{00}, \ldots, \varphi_{11}$, celles enfin de dérivées principales d'ordres et de genres moindres de ces mêmes fonctions.

La même relation, appliquée au calcul de la valeur initiale de la dérivée principale semblable de l'intégrale hypothétique de même nom du système (α), a pour second membre un polynôme contenant exactement de la même manière les quatre sortes de quantités qui remplissent dans ce système les mêmes rôles que ceux des quantités ci-dessus énumérées dans (α') : les mêmes facteurs numériques, les valeurs initiales des mêmes dérivées partielles par rapport à x, y, $u_{00}, \ldots, v_{11}$ des coefficients des dérivées paramétriques dans les seconds membres des équations (α), celles des dérivées paramétriques semblables de $u_{00}, \ldots, v_{11}$, celles enfin des dérivées principales semblables de ces intégrales cherchées.

Or, dans les deux polynômes, les facteurs de la première sorte sont égaux ; dans le second, le module d'un facteur de la deuxième sorte est inférieur à la valeur du facteur homologue dans le premier, en vertu du lemme (I) combiné avec la définition des quantités r, M(1°) et des fonctions Θ, Θ', ϑ (2°) (4°) (5°); celui d'un facteur de la troisième sorte dans le second polynôme est nul par hypothèse, et par suite son

module est nécessairement inférieur à la valeur (positive) du facteur homologue dans le premier.

Donc le module du second polynôme est forcément inférieur à la valeur du premier, si, pour lui, les modules des facteurs de la quatrième sorte sont aussi inférieurs aux valeurs des facteurs homologues dans le premier; ou, ce qui revient au même, la valeur initiale d'une dérivée principale quelconque des fonctions inconnues u_{00}, ..., v_{11} a un module inférieur à la valeur initiale de la dérivée semblable de la fonction de même nom dans les intégrales fictives υ_{00}, ..., φ_{11}, s'il en est ainsi pour toutes les dérivées principales d'ordres et de genres moindres.

Comme le fait en question a lieu évidemment pour le premier ordre, il est général; les coefficients des séries entières en x, y qui donnent les intégrales u_{00}, ..., v_{11} du système proposé (α) ont des modules inférieurs à ceux de mêmes rangs dans les développements de υ_{00}, ..., φ_{11}, et par suite ces séries sont toutes convergentes, dans des limites au moins aussi étendues que le développement, par la formule de Maclaurin, de la fonction olotrope $\Omega(x+y)$ (5°).

7° *La proposition ci-dessus (6°) est vraie pour le système* (α), *quelles que soient les conditions initiales.*

Supposons que les conditions initiales données soient :

$$\begin{array}{llll} u_{00} = u^0_{00}(x,y), & v_{00} = v^0_{00}(x,y) & & \\ u_{01} = u^0_{01}(x) \ \text{et} & v_{01} = v^0_{01}(x) & \text{pour } y = y_0, & \\ u_{10} = u^0_{10}(y) \ \text{et} & v_{10} = v^0_{10}(y) & \text{pour } x = x_0, & \\ u_{11} = u^0_{11} \ \text{et} & v_{11} = v^0_{11} & \text{pour } x = x_0 & \text{et} \quad y = y_0, \end{array}$$

les fonctions arbitraires étant, bien entendu, toutes olotropes en x_0, y_0, et les constantes x_0, y_0, $u^0_{00}(x_0, y_0)$, $v^0_{00}(x_0, y_0)$, $u^0_{01}(x_0)$, $v^0_{01}(x_0)$, $u^0_{10}(y_0)$, $v^0_{10}(y_0)$, u^0_{11}, v^0_{11} tombant toutes dans les aires (Σ).

En appelant $'x$, $'y$ deux nouvelles variables indépendantes et $'u_{00}, \ldots, 'v_{11}$ huit nouvelles fonctions inconnues, le changement de variables

$$x = x_0 + 'x, \quad y = y_0 + 'y,$$
$$u_{00} = u^0_{00}(x_0 + 'x, y_0 + 'y) + 'u_{00}, \ldots, \quad v_{11} = v^0_{11} + 'v_{11}$$

transforme le système considéré en un autre linéaire et de même

forme $('\alpha)$, qu'il suffit d'intégrer avec les conditions initiales détaillées à l'alinéa (6°) pour obtenir ensuite les intégrales du système (α) au moyen des formules de transformation ci-dessus écrites.

Or cette intégration est possible par ce qui précède (6°); effectivement, les valeurs o, o, o, ..., o des quantités $'x, 'y, 'u_{00}, \ldots, 'v_{11}$ tombent évidemment dans les limites d'olotropie des coefficients des dérivées paramétriques dans les seconds membres de $('\alpha)$, en vertu de la théorie des fonctions composées, combinée avec l'olotropie supposée des fonctions arbitraires et des coefficients des dérivés paramétriques de $u_{00}, \ldots, v_{11}$ dans les seconds membres de (α). Quant aux conditions de passivité du système $('\alpha)$, elles sont évidemment satisfaites en vertu de celles qui sont supposées avoir lieu pour (α).

V. *Tout système immédiat et passif qui n'est pas linéaire par rapport aux dérivées paramétriques des fonctions inconnues peut être ramené à un système de même nature, mais linéaire.*

Considérons, pour fixer les idées, le système non linéaire

$$(b)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}_x\left(x, y, z, t, u, \dfrac{du}{dz}, \dfrac{du}{dt}\right), \\ \dfrac{du}{dy} = \mathrm{U}_y\left(x, y, z, t, u, \dfrac{du}{dz}, \dfrac{du}{dt}\right), \\ \text{———————} \\ \text{———————} \end{cases}$$

Il est évident que toute intégrale ordinaire de ces équations forme, avec les nouvelles fonctions inconnues u'_z, u'_t, un groupe d'intégrales ordinaires du système d'équations différentielles :

$$(b')\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}_x(x, y, z, t, u, u'_z, u'_t), & \dfrac{du'_z}{dx} = \dfrac{d\mathrm{U}_x}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{du}u'_z + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{du'_z}\dfrac{du'_z}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{du'_t}\dfrac{du'_t}{dz}, & \dfrac{du'_t}{dx} = \dfrac{d\mathrm{U}_x}{dt} + \cdots + \dfrac{d\mathrm{U}_x}{du'_z}\dfrac{du'_t}{dz} + \cdots, \\ \dfrac{du}{dy} = \mathrm{U}_y(x, y, z, t, u, u'_z, u'_t), & \dfrac{du'_z}{dy} = \dfrac{d\mathrm{U}_y}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{du}u'_z + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{du'_z}\dfrac{du'_z}{dz} + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{du'_t}\dfrac{du'_t}{dz}, & \dfrac{du'_t}{dy} = \dfrac{d\mathrm{U}_y}{dt} + \cdots + \dfrac{d\mathrm{U}_y}{du'_z}\dfrac{du'_t}{dz} + \cdots, \\ \dfrac{du}{dz} = u'_z, & \text{———————} & \text{———————} \\ \dfrac{du}{dt} = u'_t, & \dfrac{du'_z}{dt} = \dfrac{du'_t}{dz}, & \text{———————} \end{cases}$$

qui se déduit du système (b) suivant une loi de formation visible.

Réciproquement, dans tout groupe d'intégrales ordinaires du système (b'), la fonction désignée par la lettre u est une intégrale ordinaire du système (b).

Or le système (b'), évidemment linéaire, est en outre immédiat (**2**), car les seconds membres des équations de la deuxième colonne ne contiennent aucune dérivée de la fonction u, dont la variable principale z est paramétrique pour u'_z ; et ceux des équations de la troisième colonne ne contiennent des dérivées ni de u, dont les variables principales z, t sont paramétriques pour u'_t, ni de u'_z, dont la variable principale t est paramétrique pour u'_t.

Quant à ses conditions de passivité, elles sont évidemment satisfaites, en vertu tant de la nature relative des équations qui composent ce système, que de la condition de passivité du système (b) jointe à quelques-unes des relations subséquentes qui assurent l'identité des diverses expressions des dérivées complexes de la fonction u [considérée dans le système (b)] au moyen des variables, de cette fonction et de ses dérivées paramétriques d'ordres égaux ou moindres.

VI. *Les développements des intégrales du système (a) convergent dans tous les cas, conformément à l'énoncé du théorème* (**15**), *ce qui achève la démonstration de cette proposition.*

Supposons, toujours pour fixer les idées, qu'il s'agisse du système (b) (V) à intégrer avec la condition initiale

$$c) \qquad u = \upsilon(z, t) \quad \text{pour } x = x_0,\ y = y_0,$$

la fonction arbitraire $\upsilon(z, t)$ étant olotrope pour $z = z_0$, $t = t_0$, et les quantités $x_0, y_0, z_0, t_0, \upsilon(z_0, t_0), \left(\frac{d\upsilon}{dz}\right)_{z_0, t_0}, \left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)_{z_0, t_0}$ tombant, bien entendu, dans les limites d'olotropie des seconds membres U_x, U_y.

Il est évident que les fonctions

$$\upsilon'_z(z, t_0) = \frac{d\upsilon(z, t_0)}{dz}, \quad \upsilon'_t(z, t) = \frac{d\upsilon(z, t)}{dt}$$

sont olotropes en z_0, t_0 et que les quantités

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0,\ \upsilon(z_0, t_0),\ \upsilon'_z(z_0, t_0),\ \upsilon'_t(z_0, t_0)$$

tombent dans les limites d'olotropie des coefficients des dérivées paramétriques $\frac{du'_z}{dz}$, $\frac{du'_t}{dz}$, $\frac{du_t}{dt}$ et des termes indépendants de ces dérivées dans les seconds membres des équations (b'). Effectivement ces coefficients sont tantôt l'unité, tantôt les fonctions olotropes U_x, U_y (avec d'autres lettres pour la désignation de leurs variables), tantôt leurs dérivées premières, tantôt des expressions entières par rapport à ces dérivées et à u'_z, u'_t.

Donc le système immédiat (b'), étant passif et linéaire, admet (IV, 7°) pour intégrales des sommes de séries entières en $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, $t - t_0$, qui sont convergentes, et que l'on peut assujettir aux conditions initiales

$$\begin{array}{lll} u = v(z_0, t_0) & \text{pour } x = x_0, \ y = y_0, \ z = z_0, & t = t_0, \\ u'_z = v'_z(z, t_0) & \text{pour } x = x_0, \ y = y_0, & t = t_0, \\ u'_t = v'_t(z, t) & \text{pour } x = x_0, \ y = y_0. & \end{array}$$

Or, celle de ces intégrales qui est désignée par la lettre u satisfait au système (b), comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, et il est évident qu'elle satisfait aussi à la relation (c).

16. Aux termes du théorème de Cauchy, tel que je l'ai énoncé et démontré (*P.* 87), la grandeur des rayons de convergence du développement d'une fonction par la série de Taylor, à partir de valeurs particulières données des variables indépendantes, dépend de l'étendue des aires où elle est olotrope, ainsi que des positions qu'y occupent les valeurs particulières des variables dont il s'agit, mais nullement de la grandeur des olomètres de cette fonction en tel ou tel système de valeurs des variables situées dans ces aires.

La recherche *directe* des olomètres initiaux (rayons de convergence des développements initiaux) des intégrales ordinaires de notre système d'équations différentielles (a) n'offre donc aucun intérêt, aussi longtemps toutefois qu'on ne s'écarte pas du domaine des généralités ; il vaut mieux en général l'opérer *indirectement* par la délimitation de ces aires. Je me contenterai donc de rappeler qu'on obtiendra des limites inférieures de ces olomètres en prenant ceux d'une fonction

auxiliaire analogue à la fonction Ω (n° **15**, IV, 2°), dont les éléments se déduisent facilement de ceux des seconds membres du système donné (a). Il semble moins avantageux de chercher à étendre ces limites *a priori* que d'utiliser pour cet objet les ressources spéciales propres aux cas particuliers dont on aura à s'occuper.

17. La possibilité ci-dessus établie (**15**, V) de ramener un système quelconque d'équations différentielles à la forme linéaire n'était peut-être pas inconnue. Quoi qu'il en soit, elle me paraît devoir fixer l'attention des géomètres par les ressources qu'elle peut offrir dans la théorie générale des équations aux dérivées partielles.

On remarquera effectivement que l'on ne saurait tirer des équations différentielles, d'équations finies données, sans passer par les équations différentielles *essentiellement linéaires* que la différentiation fournit tout d'abord. Ce fait autorise à penser que les équations linéaires forment une étape non moins essentielle dans la marche inverse qui conduit d'un système d'équations différentielles à leurs intégrales. Peut-être faut-il chercher dans cette direction l'extension à toutes les équations aux dérivées partielles de la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations linéaires du premier ordre.

Intégrales exceptionnelles; intégrales singulières.
Systèmes quelconques.

18. Quand le système immédiat (a) défini au n° **2** n'est pas passif, ses conditions de passivité ne sont pas toutes satisfaites *identiquement*, c'est-à-dire en y considérant comme représentant autant de variables indépendantes les unes des autres, les notations affectées aux variables, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques des deux premiers ordres. Mais, s'il admet quelque groupe d'intégrales ordinaires, il est clair qu'elles vérifieront *comme fonctions* les conditions de passivité non satisfaites identiquement, puisque, en y laissant aux notations leur sens primitif, ces relations ne sont au fond que de nouvelles équations différentielles résultant de la combinaison des proposées avec quelques-unes de celles qu'engendre leur différentiation.

J'ai donné aux intégrales de cette espèce le nom d'*exceptionnelles* (*P.* 263). La marche à suivre pour les découvrir est maintenant évidente : *il suffit d'adjoindre au système* (a) *celles de ses conditions de passivité qui ne sont pas satisfaites identiquement, et d'intégrer le système résultant après l'avoir ramené au premier ordre,* question dont je dirai un mot tout à l'heure.

On remarquera que les intégrales d'un système immédiat non passif ne renferment jamais des éléments d'indétermination (constantes ou fonctions arbitraires) aussi étendus que ceux d'un système passif de même nature; car elles sont assujetties, en définitive, à satisfaire à un plus grand nombre d'équations. Elles n'existeront même pas, quand ces équations complémentaires plus ou moins nombreuses seront incompatibles avec les proposées.

19. Pour obtenir les intégrales singulières (5) du système immédiat (a) passif ou non, *on doit,* conformément à la définition de ces intégrales, *adjoindre successivement à ce système les divers groupes de relations qu'il faut établir entre les variables, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques premières, pour faire cesser l'olotropie de quelques seconds membres par rapport à ces trois sortes de quantités considérées un instant comme autant de variables indépendantes les unes des autres.* Comme pour les intégrales exceptionnelles, l'existence des intégrales singulières n'est que fortuite, et leur recherche revient à l'intégration d'équations différentielles simultanées comprenant les proposées, *mais plus nombreuses que celles-ci.*

20. Des équations quelconques (du premier ordre) étant données, on les résoudra par rapport au plus grand nombre possible de dérivées des fonctions inconnues, de manière à obtenir un ou plusieurs systèmes immédiats dont, à l'aide des procédés ci-dessus indiqués, on cherchera successivement les intégrales ordinaires ou exceptionnelles et les intégrales singulières.

Comme cette résolution peut le plus généralement s'opérer de plusieurs manières (soit par rapport à certaines dérivées, soit par rapport à d'autres), on pourra le plus souvent aussi mettre les intégrales sous plusieurs formes différentes. Par exemple, selon que telles ou telles

variables seront principales ou paramétriques pour une fonction inconnue déterminée, la fonction arbitraire correspondant à cette intégrale dépendra de telles ou telles variables.

Quant au calcul des intégrales exceptionnelles et singulières, il ne présente aucun cercle vicieux, bien que le contraire semble peut-être avoir lieu. Effectivement, il exige toujours l'adjonction de *nouvelles* équations à celles que l'on traite; or cette opération conduit nécessairement, en fin de compte, soit à des systèmes passifs dépourvus d'intégrales singulières dont les intégrales ordinaires résolvent le problème, soit à des équations incompatibles qui répondent négativement à la question, dans la phase où elle est arrivée.

21. Comme je l'ai fait voir déjà pour les équations simultanées pures (*P*. Chap. X), la théorie d'un système d'équations *mixte*, c'est-à-dire contenant à la fois des équations différentielles et des équations finies, se ramène immédiatement à celle d'un système d'équations *toutes différentielles*. Il suffit pour cela de substituer à chaque équation finie l'ensemble des équations différentielles que donne sa différentiation première répétée successivement par rapport à chacune des variables indépendantes de la question. Les intégrales du système résultant (qui est purement différentiel) sont les solutions du système proposé, pourvu qu'on ne leur ait assigné que des valeurs initiales propres à satisfaire aux équations finies, conjointement avec les valeurs initiales des variables indépendantes.

Note relative au pulsomètre de Hall;

Par M. DE MAUPEOU,

Sous-Ingénieur de la Marine.

Historique. — L'idée d'utiliser la force expansive de la vapeur à élever les liquides en la faisant agir directement à leur surface est déjà ancienne; on la trouve, dès le début du XVIIe siècle, dans les écrits de Salomon de Caus, qui proposait de chauffer l'eau dans un vase, pour que la vapeur, en se produisant, la fît monter par un tube convenablement disposé. Un siècle ne s'était pas écoulé que Thomas Savery appliquait le même principe à la construction de la machine qui porte son nom et qui fut utilisée à divers travaux d'épuisement. Le capitaine Savery sépara la chaudière du réservoir qui constitue le corps de pompe et dans lequel il envoyait la vapeur à l'aide d'un robinet. Les monte-jus employés dans les sucreries sont de véritables pompes de Savery.

En 1863, MM. Louvié et Rival proposèrent une pompe basée sur les mêmes principes. Leur appareil était double et rendu automatique par l'emploi de flotteurs qui, tout en empêchant le contact direct de l'eau et de la vapeur, commandaient les robinets de distribution; un tuyau de communication établi entre les deux corps de pompe servait à injecter de l'eau froide dans celui qui devait aspirer, de manière à activer la condensation. Cette pompe fonctionnait convenablement, mais elle était assez volumineuse et un peu compliquée : aussi ne s'est-elle pas répandue; elle constituait néanmoins un progrès très réel sur les appareils précédents.

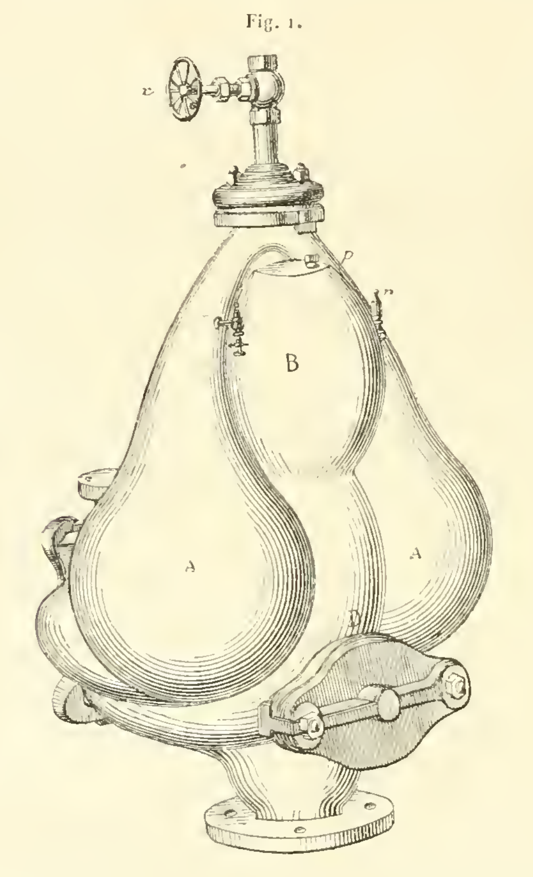
C'est à un Américain, M. Hall, que revient l'honneur d'avoir rendu réellement pratique la pompe de l'Anglais Savery, grâce à d'heureuses modifications dans les formes, à la disposition ingénieuse du clapet de distribution de vapeur et à d'autres améliorations de détail.

Description. — Le pulsomètre, c'est le nom donné par M. Hall à son instrument, est double et automatique comme la pompe Louvié, mais il ne comporte pas de flotteur et son grand mérite consiste dans sa simplicité.

En examinant les figures suivantes, on arrive facilement à se rendre compte de l'économie de l'appareil.

Les *fig.* 1 et 2 représentent en perspective et en coupe le côté de

Fig. 1.

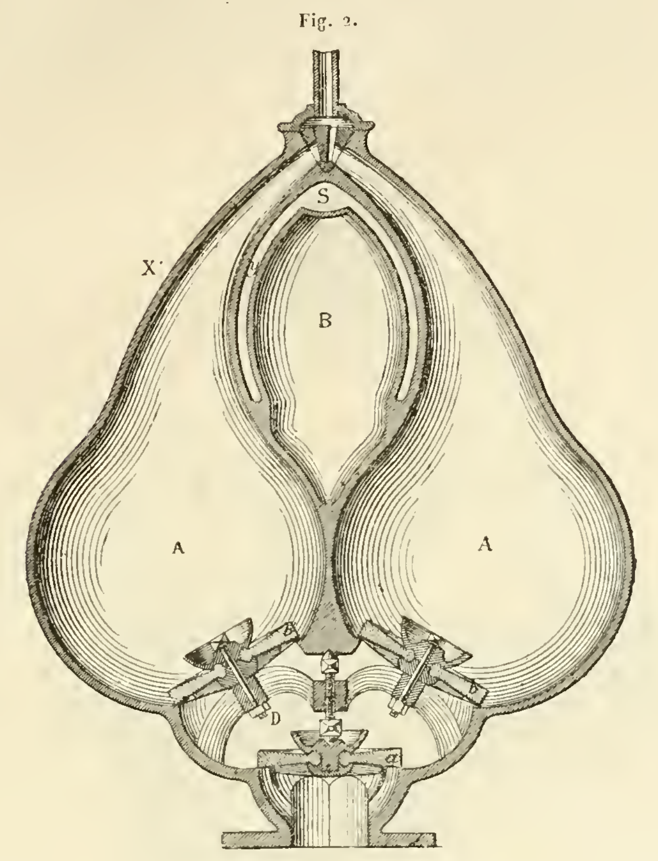


l'aspiration. Les *fig.* 4 et 5 sont relatives au côté du refoulement. Quant

à la *fig.* 3, elle représente à plus grande échelle le clapet d'arrivée de vapeur.

Deux bouteilles à long col A, A, placées à côté l'une de l'autre, abou-

Fig. 2.



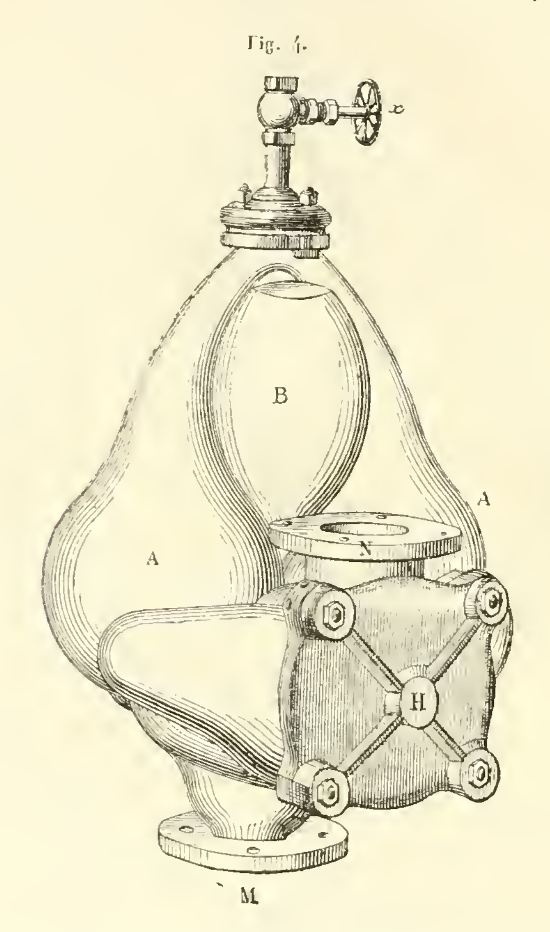
tissent, à leur partie supérieure S, à un clapet métallique C (*fig.* 3), qui,

Fig. 3.

en basculant à droite ou à gauche, permet à la vapeur de pénétrer dans

l'une ou l'autre des bouteilles ; ce clapet joue un rôle très important dans le fonctionnement du pulsomètre, et son mouvement automatique est le point le plus intéressant et le plus original de l'appareil. A la partie inférieure se trouvent d'un côté la chambre d'aspiration D, qui

Fig. 4.

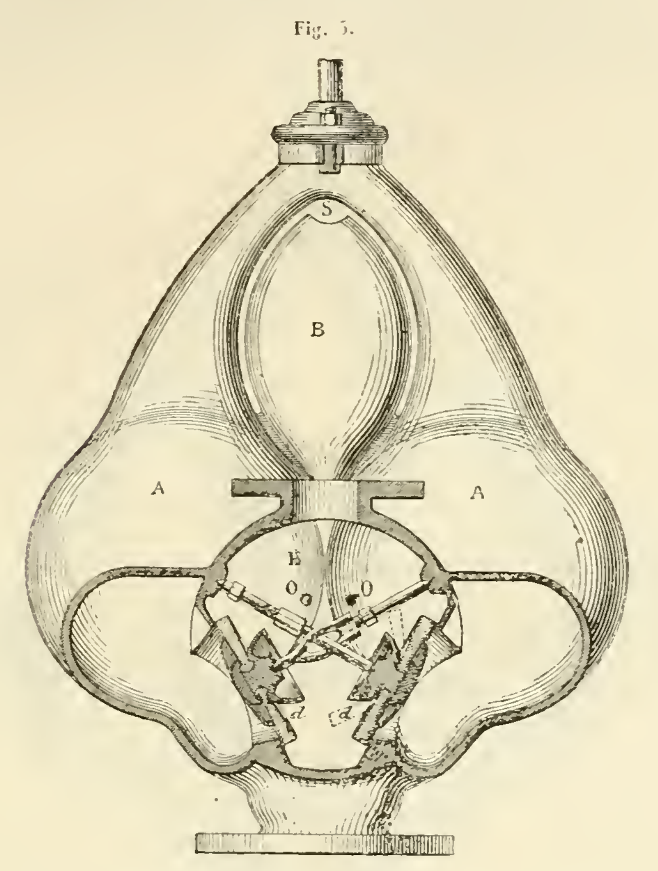


contient trois clapets circulaires en caoutchouc *a*, *b*, *b* (*fig.* 2), de l'autre côté la chambre de refoulement H, qui renferme deux clapets également en caoutchouc (*fig.* 5). Entre les deux bouteilles on a disposé un réservoir B communiquant avec la chambre d'aspiration D. Chacun des trois vases A, A, B est muni d'une petite soupape atmosphérique *r*, *r* (*fig.* 1), dont on règle la levée de manière à produire une rentrée d'air suffisante pour éviter les coups de marteau d'eau. Enfin

deux trous O, O (*fig.* 5) établissent une communication entre les bouteilles et la chambre de refoulement ; nous verrons plus tard leur utilité. Tous ces organes sont bien groupés et faciles à visiter.

Dans l'appareil représenté par les *fig.* 6 et 7, les clapets en caoutchouc sont remplacés par d'autres en métal, à l'aspiration et au refoulement.

Fig. 5.

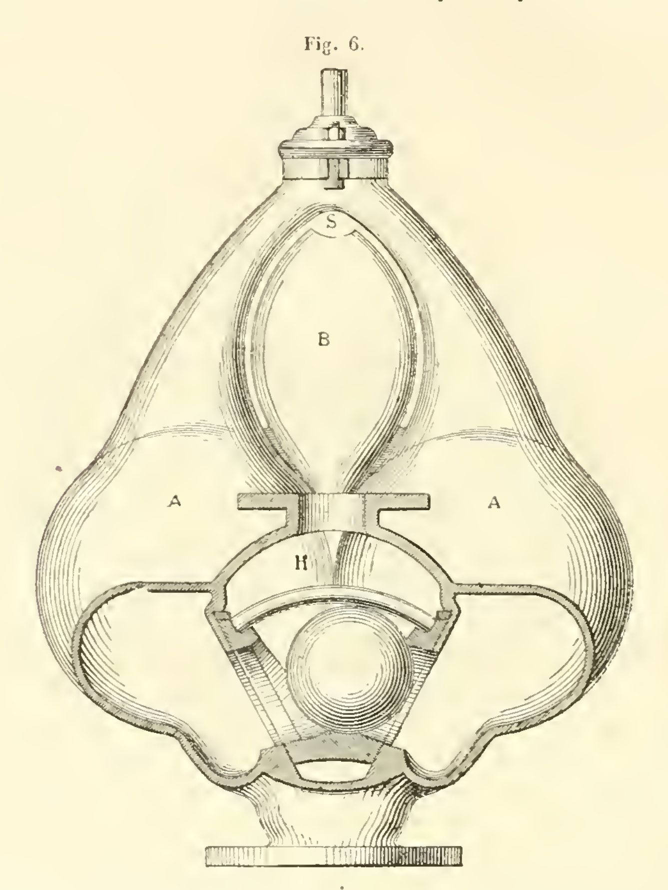


Fonctionnement. — Lorsqu'on ouvre le robinet de vapeur, elle s'introduit dans l'une ou l'autre des bouteilles suivant la position du clapet situé en S, elle chasse l'air par les clapets de refoulement *d*, *d*; puis, si on ferme le robinet, elle se condense en produisant un vide partiel qui aspire l'eau par les clapets *b*, *b*, et la bouteille s'emplit au moins en partie; l'appareil est alors amorcé, et, lorsque la vapeur

vient de nouveau dans la bouteille, elle chasse l'eau en vertu de sa pression.

Une fois en marche, le clapet de vapeur bascule de lui-même, de manière à renverser les sens des courants et à faire que dans chaque bouteille l'eau soit successivement refoulée par la pression de la vapeur

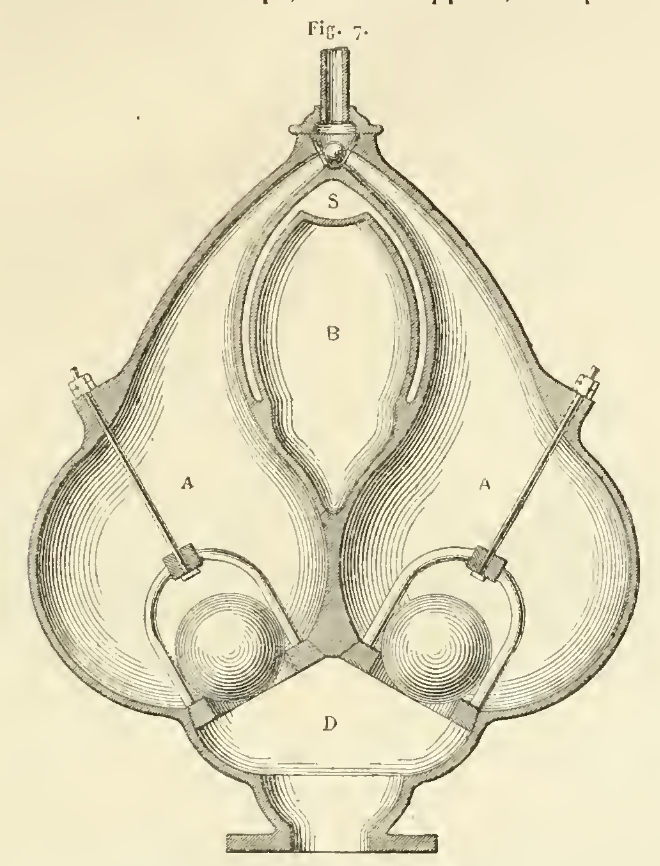
Fig. 6.



et aspirée par sa condensation; comme les opérations se font en sens inverse dans les deux bouteilles, il en résulte une assez grande continuité dans l'aspiration comme dans le refoulement. On peut expliquer le fonctionnement automatique du clapet de vapeur de la manière suivante : la vapeur, en arrivant dans le col de la bouteille, qui reste toujours chaud, se condense peu au début, mais, à mesure que l'eau est refoulée, son niveau baisse et s'élargit, la surface de con-

densation augmente rapidement, la vitesse d'écoulement de l'eau s'accélère également, et pour ces deux motifs il se produit au passage dans le clapet c, dont la section est faible, une dépression qui est peut-être favorisée par le changement de direction que la veine fluide subit en cet endroit. En même temps, du côté opposé, la vapeur restée dans

Fig. 7.



la bouteille se condense et produit un vide que l'eau vient combler, mais le liquide, en s'élevant dans un vase de forme conique, doit produire un effet de marteau d'eau assez prononcé, en vertu de sa vitesse acquise; il doit donc comprimer fortement la vapeur mélangée d'air qui se trouve entre lui et le clapet. On conçoit que, la pression diminuant sur une face du clapet tandis qu'elle augmente sur l'autre, il arrive un moment où il bascule, et alors l'opération se produit en sens inverse.

La forme de poire donnée aux bouteilles qui constituent les corps de pompe du pulsomètre a une grande importance pour le bon fonctionnement de l'appareil. C'est grâce à cette forme conique que la vapeur n'est d'abord en contact qu'avec une faible surface refroidissante, et qu'elle se détend progressivement sans troubler la surface du liquide [1], tandis qu'avec les formes anciennement usitées le jet de vapeur agitait l'eau, renouvelait la couche superficielle, et, en multipliant les parties en contact avec la vapeur, augmentait considérablement l'échauffement du liquide et la dépense de calorique. Enfin, lorsque l'eau remonte dans la bouteille, la forme du col dirige les filets liquides et amène à la surface l'eau la plus chaude; le fait est que, pendant le fonctionnement du pulsomètre, le col des bouteilles reste toujours à une température très élevée, tandis que la partie basse est froide.

Divers détails contribuent encore au bon fonctionnement du pulsomètre. Le réservoir B modère les effets de marteau d'eau dans le tuyautage d'aspiration. Les petites soupapes atmosphériques, ou reniflards, ont également pour but d'éviter les chocs que produiraient les mouvements trop brusques de l'eau dans les réservoirs; on doit régler leur ouverture suivant la hauteur d'aspiration, de manière à obtenir un fonctionnement régulier; lors de la mise en marche, ils doivent être entièrement fermés. Enfin, dans chaque bouteille, un trou percé au niveau supérieur de l'orifice de refoulement établit une communication directe entre la bouteille et la chambre de refoulement. Cette disposition joue un rôle important dans le fonctionnement de l'appareil, à deux points de vue différents. Pendant la période de refoulement, lorsque la vapeur atteint le trou en question, elle s'échappe directement dans l'eau froide du refoulement: il en résulte une forte dépression dans la bouteille qui détermine sûrement le mouvement de bascule du clapet d'arrivée de vapeur, s'il ne s'est pas encore produit. Pendant la période d'aspiration, cette communication donne lieu à un retour du refoulement vers la bouteille; ce courant d'eau froide arrivant dans la couche d'eau échauffée forme une sorte d'injection qui active la condensation, surtout à son début.

---

[1] Il résulte des expériences de Péclet que, lorsque l'air s'écoule par un ajutage conique divergent, si l'angle au sommet du cône ne dépasse pas 10°, la veine fluide ne se détache pas des parois.

Cette communication n'est pas absolument indispensable, mais, lorsqu'on la supprime, l'allure de l'instrument est loin d'avoir la même régularité.

Essais. — Un pulsomètre de trente tonneaux a été essayé à l'arsenal de Cherbourg comparativement avec un éjecteur américain construit par M. Peteau.

On a employé les pressions de vapeur suivantes :

$$1^{kg},80, \quad 2^{kg},25, \quad 4^{kg}, \quad 5^{kg},$$

correspondant aux timbres des divers types de chaudières marines. On a fait varier les hauteurs d'aspiration et de refoulement de mètre en mètre, dans les limites utiles pour le service à bord des navires de la flotte, savoir :

Hauteur totale .... 3^m, 4^m, 5^m, 6^m, 7^m et 8^m.

L'aspiration se faisait dans une bâche où l'on maintenait un niveau constant. On mesurait le débit et les températures de l'eau aspirée et refoulée; la différence a permis de calculer la dépense de vapeur, qu'il eût été difficile d'obtenir directement. Les essais, disposés et conduits avec beaucoup de soin et d'intelligence par M. Bigot, maître principal de l'atelier des chaudières à vapeur, ont donné des résultats très favorables au pulsomètre (1).

L'amorçage ne présente aucune difficulté, en ayant soin de fermer les reniflards; il suffit d'ouvrir et de fermer plusieurs fois de suite la soupape de prise de vapeur; en deux minutes environ on est en marche : le réglage se fait rapidement. Pour arrêter l'appareil, il n'y a qu'à fermer la prise de vapeur; le pulsomètre reste amorcé pendant plusieurs heures, en ayant soin de fermer les petits reniflards.

On n'a pas essayé de refouler à plus de 6^m de hauteur, mais on peut certainement dépasser de beaucoup cette limite avec une pression

(1) Après l'achèvement des essais faits à terre, le pulsomètre a été installé à bord du *Lynx*, où il a bien fonctionné.

de vapeur suffisante. L'appareil en question a dû fonctionner dans les ateliers du constructeur à des hauteurs de 10^m et 20^m (article 3 du marché).

En aspirant à 1^m et 2^m de profondeur, l'appareil a donné de bons résultats; mais avec une hauteur d'aspiration de $2^m,50$ il ne fonctionnait plus. Depuis, on a disposé un clapet au pied du tuyau d'aspiration, de manière à amorcer le pulsomètre comme on le fait pour les pompes centrifuges, et l'on a pu aspirer à 4^m et 5^m de hauteur, mais la dépense de vapeur paraît être plus considérable. L'armement du bâtiment auquel était destiné l'appareil n'a pas permis de faire des essais complets dans ces conditions.

L'éjecteur américain a pu aspirer jusqu'à 4^m de profondeur sans clapet de pied, et à 5^m avec un clapet et en amorçant; l'installation dont on disposait n'a pas permis de dépasser cette limite.

Pour voir si les eaux sales de la cale des navires s'opposeraient au fonctionnement du pulsomètre, on a fait deux expériences en mélangeant l'eau d'escarbilles préalablement passées dans un crible dont les trous avaient $0^m,005$ de diamètre, dans les conditions suivantes :

DURÉE de l'essai.	HAUTEUR		POIDS REFOULÉ.			
	d'aspiration.	de refoulement	Escarbilles	Eau.	Total	Rapport.
	m	m	kg	kg	kg	
Une heure............	1	7	1200	26 000	27 200	21
»	0	8	1500	25 800	27 300	17

On voit que la quantité d'escarbilles enlevées a été très considérable, et cependant l'appareil a bien fonctionné.

Pour assurer au pulsomètre son maximum d'effet, on a dû faire à chaque essai quelques tâtonnements en variant l'ouverture de la soupape de prise de vapeur; on n'a pas tardé à reconnaître que les conditions les plus avantageuses correspondent à une différence de température de 2° entre l'eau d'aspiration et celle du refoulement, et l'on a fonctionné dans ces conditions.

Le Tableau qui accompagne ce Rapport donne les résultats complets des expériences.

On remarque de suite que le pulsomètre n'élève que de 2° la température de l'eau, tandis que l'éjecteur américain l'élève de 14°. L'éjecteur Fridman, essayé à Brest par M. Risbec (*Mémorial du Génie maritime*, IIe livr., 1875), produisait une élevation de température de 13°. On peut en conclure que *le pulsomètre dépense environ sept fois moins de vapeur que l'éjecteur*, pour produire le même résultat.

Pour calculer la quantité de charbon dépensée, on a admis que chaque kilogramme de combustible fournissait 5000^{cal} à l'eau pour la transformer en vapeur, ce qui correspond à une vaporisation d'un peu moins de 8^{lit} par kilogramme de charbon avec de l'eau d'alimentation à 15°.

On constate que le nombre de pulsations augmente quand la hauteur à laquelle on élève l'eau diminue, et que le débit s'accroît à peu près dans la même proportion; mais en même temps la dépense de charbon par cheval d'eau élevée augmente beaucoup plus rapidement; elle est à peu près en raison inverse de la hauteur d'élévation. La vapeur n'ayant pas d'intermédiaire entre elle et l'eau qu'elle élève, on conçoit qu'un excès de pression de vapeur ne puisse qu'augmenter la vitesse d'écoulement sans améliorer notablement le rendement.

L'accroissement de température de l'eau élevée étant à peu près constant (1), la dépense de vapeur et de charbon est sensiblement proportionnelle au débit et indépendante de la hauteur d'élévation, en sorte que l'utilisation de l'appareil augmente avec cette hauteur.

Les chiffres suivants donnent le résumé des observations à ce point de vue.

---

(1) L'accroissement de température correspondant au maximum de rendement a toujours été de 2° dans les limites de nos expériences; mais, d'après les Notices de M. Hall, il augmenterait pour de grandes hauteurs de refoulement : il l'évalue à 2° pour 10^m d'élévation.

HAUTEUR totale d'élévation H.	NOMBRE de pulsations simples par minute N	DÉBIT par heure D.	DÉPENSE de charbon pour un débit de 1000 lit. d'eau.	DÉBIT par pulsation $\frac{D}{N \times 60}$.	DÉPENSE de charbon par cheval d'eau élevée Pc.	PRODUIT Pc×H.
		lit	m	lit	kg	
3	103,7	33,5550	0,4	5,34	36,3	108,9
4	97,0	32,575	0,4	5,59	27,1	108,4
5	92,5	30,925	0,4	5,39	21,7	108,5
6	86,5	29,225	0,4	5,62	18,0	108,0
7	83,0	28,750	0,4	5,77	15,4	107,8
8	82,2	28,625	0,4	5,79	13,5	108,8

Pour une même hauteur d'élévation, l'accroissement de la pression de vapeur augmente un peu le débit, mais sans faire varier sensiblement le rendement.

On peut ajouter que la hauteur totale à laquelle le pulsomètre peut élever l'eau est proportionnelle à la pression de la vapeur qu'on lui fournit.

Pour l'éjecteur, la dépense de charbon par cheval d'eau élevée décroît aussi à peu près en raison inverse de la hauteur de l'élévation, mais le débit augmente rapidement avec l'accroissement de la pression de vapeur et avec la diminution de la hauteur totale d'élévation, ce qui constitue une différence notable avec le pulsomètre.

Comparaison avec d'autres appareils. — Le Tableau suivant permet de comparer le pulsomètre à l'éjecteur et à une pompe fonctionnant à haute pression, au point de vue du poids et du prix :

	DÉBIT à l'heure.	POIDS.	PRIX total	PRIX au kilogr.	PRIX par tonneau de débit.	OBSERVATIONS.
	lit		fr	fr	fr	
Pompe Thirion ...	30	510	3000	5,9	100	à 120 tours.
Éjecteur	20	16	135	8,4	7	
Pulsomètre	30	100	1125	11,2	38	

On voit que le prix du pulsomètre au kilogramme est très exagéré, bien que sa construction soit fort simple; il faut évidemment l'attribuer à la nouveauté d'un appareil breveté; rapporté au tonneau d'eau élevée, le prix d'achat n'est guère que le tiers du prix de la pompe Thirion avec son moteur.

Si maintenant nous voulons établir une comparaison au point de vue de la dépense de charbon par cheval d'eau élevée, nous pouvons prendre pour termes de comparaison :

1° Les pompes de distribution d'eau de ville, qui représentent ce qu'on a construit de plus économique : les résultats que nous citons sont tirés de la publication industrielle d'Armengaud;

2° Des pompes à haute pression comme celles qu'on emploie à bord à l'épuisement des cales; malheureusement nous ne possédons pas d'essais faits sur un appareil de ce genre établi dans des conditions vraiment économiques. La pompe Thirion dont il vient d'être question recevait la vapeur d'une chaudière trop puissante et qui avait constamment la porte du foyer ouverte pendant les expériences, ce qui faussait complètement les indications relatives à la dépense de combustible.

On peut admettre qu'un appareil de ce genre bien installé dépenserait environ 2^{kg} de charbon par cheval comme les locomobiles, et que le rendement du moteur s'élèverait au moins à 0,7, ainsi que celui de la pompe, ce qui conduirait à une dépense de charbon de 4^{kg} par cheval d'eau élevée.

Le *Mémorial du Génie maritime* nous fournit, en outre, les résultats des essais de divers appareils établis dans des conditions moins économiques.

Première livraison, 1874. — Essais de la pompe centrifuge du *Suffren*, par M. Aurous.

Douzième livraison, 1874. — Essais faits par M. Risbec et M. Choron sur des pompes Behrens.

Cinquième livraison, 1877. — Essais faits par M. Huet sur des petits chevaux du type réglementaire et du système Behrens.

Ces divers documents ont permis de dresser le Tableau suivant :

NATURE DES APPAREILS.			DÉPENSE de charbon par cheval d'eau élevée.
			kg
Appareils de distribution d'eau.....	Pompes d'Ivry établies par M. Cavé..................		3
	Pompes de Niort établies par M. Cordier...............		3
	Pompes d'Angers établies par M. Farcot................		1,3
	Pompes de Nantes établies par M. Windsor...........		1,2
Pompe à haute pression............	Établies dans d'assez bonnes conditions (calcul).......		4
	Appareil centrifuge du *Suffren* (à tirage forcé) élevant l'eau à $7^m,50$....................................		6,8
	Pompes Behrens installées sur des canots à vapeur ([1])...	Essayées à Brest par M. Risbec, élevant l'eau à 30^m de hauteur......	6,9
		Essayées à Toulon par M. Choron, élevant l'eau à 15^m de hauteur.......	13,6
Petits chevaux essayés à Brest par M. Huet.	Appareil réglementaire...........................		13
	Système Behrens................................		32
Pulsomètre élevant à une hauteur de...	4^m..		27
	6^m..		18
	8^m..		13,5
Éjecteur élevant à une hauteur de...	4^m..		190
	6^m..		126
	8^m..		96

([1]) On a supposé que les machines de canots consommaient 3^{kg} de charbon par cheval, comme cela résulte des essais de M. Mangin (*Mémorial du Génie maritime*, 1re livraison, 1867).

Conclusion. — On voit que le pulsomètre laisse bien loin derrière lui l'appareil de Savery. Il constitue une pompe remarquable par sa simplicité, la facilité avec laquelle on l'installe, et paraît très peu susceptible de se déranger. Il peut refouler à de très grandes hauteurs avec de la vapeur à haute pression ; il aspire facilement jusqu'à 2^m et peut puiser son eau à une profondeur bien plus considérable, à la condition d'installer un clapet de pied sur son tuyau d'aspiration et de l'amorcer. Dans les limites de nos expériences, l'échauffement de l'eau élevée a toujours été de 2° environ, en sorte que le rendement économique de l'appareil a augmenté proportionnellement à la hauteur d'élévation, tandis que le débit a très peu varié avec celle-ci. Mais il ne faudrait pas trop généraliser ce résultat, car M. Hall, dans ses Notices, évalue l'échauffement de l'eau à 2° pour 10^m de hauteur d'élévation.

En résumé, cet ingénieux appareil, grâce à sa simplicité, à son prix d'achat peu élevé et qui paraît appelé à diminuer encore, peut rendre de grands services dans bien des circonstances et notamment à bord des navires de guerre, pour l'épuisement de l'eau de la cale. Comme rendement, il est bien supérieur aux éjecteurs, puisqu'il échauffe l'eau qui le traverse sept fois moins qu'eux; il peut soutenir la comparaison avec certaines pompes peu économiques, mais il est bien inférieur aux pompes établies dans de bonnes conditions, et il ne saurait convenir pour les installations fixes et fonctionnant d'une façon continue, comme les distributions d'eau de ville; toutes les fois, au contraire, qu'on se propose d'échauffer un liquide en même temps que de l'élever, le pulsomètre paraît être la meilleure pompe à employer.

Résultats des essais comparatifs d'un pulsomètre de 30^ch et d'un éjecteur

NUMÉRO de l'essai.	PRESSION à la chaudière.	NOMBRE de pulsations simples.	HAUTEURS. Aspiration	HAUTEURS. Refoulement	HAUTEURS. Total H	TEMPÉRATURE DE L'EAU. aspirée T. Pulsomètre	aspirée T. Éjecteur	refoulée T'. Pulsomètre	refoulée T'. Éjecteur	Différence T' − T = θ. Pulsomètre	Différence T' − T = θ. Éjecteur	DÉBIT DE L'EAU par heure D^lit. Pulsomètre.	DÉBIT DE L'EAU par heure D^lit. Éjecteur.	TRAVAIL en chevaux d'eau élevée par heure $T_u = \frac{H \times D}{75 \times 3600}$. Pulsomètre	TRAVAIL Éjecteur	POIDS de charbon dépensé par heure $P_o = \frac{e \times D}{5000}$. Pulsomètre	POIDS Éjecteur	DÉPENSE de charbon par cheval d'eau élevée et par heure $\frac{P_o}{T_u}$. Pulsomètre.	DÉPENSE Éjecteur.
						°	°	°	°	°	°								
1.......	5,5	85	2	6	8	13,5	//	15,5	//	2	//	29200	//	0,86	//	11,68	//	13,58	//
2.......	4	83	//	//	//	13,5	13,5	15,5	27,5	//	14	28800	25700	0,85	0,76	11,52	71,96	13,55	94,67
3.......	2,25	82	//	//	//	13,5	13,5	15,5	28,5	//	15	28500	13500	0,84	0,40	11,40	40,50	13,57	100,01
4.......	1,80	79	//	//	//	13,5	13,5	15,5	27,5	//	14	28000	10200	0,83	0,30	11,05	28,16	13,31	93,86
Moyenne.		82,25			8							28625						13,50	
5.......	5	89	2	5	7	13,5	//	15,5	//	2	//	29700	//	0,77	//	11,88	//	15,41	//
6.......	4	82	//	//	//	13,5	13,5	15,5	27,5	//	14	28900	27600	0,75	0,71	11,56	77,28	15,41	108,84
7.......	2,25	81	//	//	//	13,5	13,5	15,5	30	//	17	28400	15000	0,74	0,31	11,36	51	15,35	164,51
8.......	1,80	80	//	//	//	13,5	13,5	15,5	34	//	20,5	28000	10780	0,73	0,28	11,20	44,19	15,34	157,81
Moyenne.		83			7							28750						15,38	
9.......	5	90	2	4	6	13,5	//	15,5	//	2	//	29700	//	0,66	//	11,88	//	18,00	//
10.......	4	89	//	//	//	13,5	//	15,5	27,5	//	14	29500	29850	0,65	0,66	11,80	83,58	18,15	126,63
11.......	2,25	87	//	//	//	13,5	13,5	15,5	27,5	//	14	29000	19350	0,64	0,43	11,60	54,18	18,13	126,00
12.......	1,80	80	//	//	//	13,5	13,5	15,5	27,5	//	14	28700	14100	0,64	0,31	11,48	39,48	17,93	127,35
Moyenne.		86,5			6							29225						18,05	
13.......	5	97	2	3	5	13	//	15	//	2	//	31500	//	0,58	//	12,60	//	21,73	//
14.......	4	95	//	//	//	13	13	15	27	//	14	31000	31050	0,57	0,57	12,40	86,94	21,75	152,53
15.......	2,25	92	//	//	//	13	13	15	27	//	14	30700	21600	0,57	0,40	12,28	60,80	21,54	152,00
16.......	1,80	86	//	//	//	13	13	15	27	//	14	30500	17750	0,56	0,33	12,20	49,70	21,78	150,60
Moyenne.		92,5			5							30925						21,70	
17.......	5	102	1	3	4	13	//	15	//	2	//	35000	//	0,52	//	14,00	//	26,92	//
18.......	4	100	//	//		13	13	15	27	//	14	33300	33300	0,49	0,49	13,32	93,24	27,18	190,30
19.......	2,25	98	//	//	//	13	13	15	27	//	14	32000	22080	0,47	0,33	12,80	61,82	27,23	187,27
20.......	1,80	88	//	//	//	13	13	15	27	//	14	30000	18100	0,44	0,26	12,00	50,68	27,27	194,92
Moyenne.		97			4							32575						27,15	
21.......	5	113	1	2	3	13	//	15	//	2	//	36000	//	0,40	//	14,40	//	36,00	//
22.......	4	107	//	//	//	13	13	15	26	//	13	34200	33300	0,37	0,37	13,68	86,18	36,97	232,92
23.......	2,25	100	//	//	//	13	13	15	27	//	14	33000	25400	0,37	0,28	13,20	71,12	35,68	254,00
24.......	1,80	95	//	//	//	13	13	15	27	//	15	31000	25650	0,34	0,27	12,40	76,94	36,47	284,96
Moyenne.		103,75			3							33550						36,28	

Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie;

PAR M. R. RADAU.

Les méthodes d'approximation qui permettent d'obtenir la valeur d'une intégrale définie qu'on ne peut déterminer directement mériteraient d'être mieux connues et plus souvent appliquées qu'elles ne le sont encore. Les cas sont assez nombreux où les « formules de quadrature » peuvent être substituées avec avantage aux développements fondés sur la nature particulière de la fonction à intégrer, qui ne laissent pas que d'entraîner parfois des calculs fatigants. J'ai donc pensé qu'il pouvait y avoir quelque intérêt à présenter une étude d'ensemble sur une classe de formules de ce genre, en m'attachant surtout à simplifier les démonstrations, à marquer le degré de précision que comportent les diverses formules et à réunir toutes les constantes dont on a besoin pour les appliquer.

1. La plupart des formules dont il sera question ici sont comprises dans la suivante :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\,dx = \Sigma A\varphi(a). \tag{1}$$

Elles fournissent la valeur de l'intégrale cherchée par une sorte de moyenne [1] où les poids A, B, C, ... sont attribués à n valeurs particulières de l'ordonnée $\varphi(x)$, qui correspondent aux abscisses a, b, c, ...

---

[1] Je dis moyenne, en supposant qu'on divise par $\Sigma A = \beta - \alpha$.

Les coefficients A, B, C, ..., comme les quantités $a, b, c, \ldots$ (qui doivent être comprises entre les limites α, β), sont, par hypothèse, des nombres indépendants de la nature de la fonction φ et qui se déterminent à l'avance, une fois pour toutes. On suppose seulement qu'entre les limites de l'intégration $\varphi(x)$ soit développable en série convergente :

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots.$$

Les mêmes remarques s'appliquent à la formule plus générale

$$(2) \qquad \int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\, dx = \Sigma \mathrm{A} \varphi(a),$$

où $f(x)$ est une fonction *donnée*.

Nous dirons qu'une formule de quadrature possède le *degré de précision* $p-1$, pour exprimer qu'elle est rigoureusement exacte toutes les fois que $\varphi(x)$ est une fonction entière d'un degré inférieur à p. Il faut pour cela que les $2n$ constantes $a, b, \ldots$, A, B, ... satisfassent aux relations

$$(3) \qquad \sum \mathrm{A} a^h = \int_\alpha^\beta x^h dx \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

s'il s'agit de la formule (1), et aux suivantes,

$$(3\ bis) \qquad \sum \mathrm{A} a^h = \int_\alpha^\beta x^h f(x)\, dx \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

s'il s'agit d'une formule du type (2). Le maximum de précision s'obtiendra donc, en général, quand le nombre des équations de condition sera égal à celui des constantes ($p = 2n$).

Les relations (3) supposent évidemment que les limites α, β soient *finies*. On voit aussi que les coefficients A sont liés aux abscisses a par des relations linéaires qui les déterminent d'une seule manière. Enfin, il est clair qu'une substitution linéaire ne change pas le degré de $\varphi(x)$, ni par conséquent le degré de précision de la formule. Or, en posant

$$x = \alpha + (\beta - \alpha) x_0, \quad a = \alpha + (\beta - \alpha) a_0, \quad \mathrm{A} = (\beta - \alpha) \mathrm{A}_0, \quad \varphi(x) = \psi(x_0),$$

la formule (1) devient

$$\int_0^1 \psi(x_0)\,dx_0 = \Sigma A_0 \psi(a_0),$$

et les coefficients A_0 sont proportionnels aux coefficients A. Comme les uns et les autres se déterminent d'une seule manière par les relations (3), on peut conclure de là que les *valeurs relatives* des coefficients sont indépendantes des limites.

Dans ce qui suit, il sera toujours entendu que les limites auront été ramenées aux valeurs fixes 0 et 1, ou bien -1 et $+1$. Pour passer du premier cas au second, il suffit de poser

$$2x_0 = 1 + x, \quad 2a_0 = 1 + a, \quad 2A_0 = A,$$

où les lettres affectées de l'indice 0 se rapportent aux limites 0 et 1. On trouvera donc les coefficients pour les limites ± 1 en *doublant* les nombres calculés pour les limites 0 et 1.

Remarquons maintenant que, si l'on applique la formule (1) à l'expression $\varphi(x) = k_0 + k_1 x + \ldots$, le résultat sera évidemment le même que si on l'avait appliquée successivement à chacun des termes de cette série, pour ajouter ensuite les résultats partiels, et, si le développement de $\varphi(x)$ dépasse le degré de précision de la formule, l'erreur sera la somme des erreurs commises dans l'évaluation des termes qui suivent x^{p-1}. Soit $-\varepsilon_p$ l'erreur commise dans l'évaluation de x^p, de sorte que

$$(4) \qquad \int_\alpha^\beta x^p\,dx = \Sigma A a^p + \varepsilon_p,$$

et ainsi de suite; la formule corrigée sera

$$(5) \qquad \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \Sigma A \varphi(a) + k_p \varepsilon_p + k_{p+1}\varepsilon_{p+1} + \ldots.$$

Le système d'équations (3), que complètent les équations (4), peut être remplacé par l'équation unique qu'on obtient en posant

$$\varphi(x) = \frac{1}{z - x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \ldots,$$

où z est une quantité arbitraire. On aura donc, pour le degré de précision $p-1$,

$$(6)\qquad \int_\alpha^\beta \frac{dx}{z-x} = \sum \frac{A}{z-a} + \frac{\varepsilon_p}{z^{p+1}} + \frac{\varepsilon_{p+1}}{z^{p+2}} + \ldots,$$

et, en écrivant $f(x)\,dx$ à la place de dx, on aura l'équation analogue qui représente le système (3 *bis*).

Ajoutons que, si la substitution linéaire employée plus haut est complétée en posant $z = \alpha + (\beta - \alpha) z_0$, les corrections ε_p^0 pour les limites o et 1 seront les coefficients de $\frac{1}{z_0^{p+1}}, \frac{1}{z_0^{p+2}}, \cdots$ dans (6), c'est-à-dire

$$\varepsilon_p^0 = \frac{\varepsilon_p}{(\beta-\alpha)^{p+1}}, \quad \varepsilon_{p+1}^0 = \frac{\varepsilon_{p+1} - \alpha(p+1)\varepsilon_p}{(\beta-\alpha)^{p+2}}, \quad \ldots;$$

par conséquent, pour $\alpha = -1$, $\beta = +1$,

$$\varepsilon_p^0 = \frac{\varepsilon_p}{2^{p+1}}, \quad \varepsilon_{p+1}^0 = \frac{\varepsilon_{p+1} + (p+1)\varepsilon_p}{2^{p+2}}, \quad \ldots.$$

En modifiant ainsi les valeurs des ε, on ne diminue point l'erreur de la formule, car le coefficient k_p augmente dans le même rapport que ε_p diminue. Mais on peut (sans modifier, il est vrai, le degré de précision $p-1$) diminuer sensiblement l'erreur du résultat en divisant l'intégration.

Supposons que l'on partage l'intervalle $1-0$ en μ parties égales, en posant

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{\mu}} + \int_{\frac{1}{\mu}}^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + \int_{\frac{\mu-1}{\mu}}^1,$$

et qu'ensuite on applique la formule (1) à chacune de ces intégrales partielles, en faisant

$$x = \frac{i + x_0}{\mu} \quad (i = 0, 1, \ldots, \mu - 1).$$

On aura d'abord

$$\int_{\frac{i}{\mu}}^{\frac{i+1}{\mu}} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\mu}\int_0^1 \varphi\left(\frac{i+x_0}{\mu}\right)dx_0$$
$$= \frac{1}{\mu}\sum A_0\varphi\left(\frac{i+a_0}{\mu}\right) + \frac{k_p\varepsilon_p}{\mu^{p+1}} + \frac{k_{p+1}}{\mu^{p+2}}\left[\varepsilon_{p+1} + (p+1)i\varepsilon_p\right] + \dots$$

en désignant toujours par ε_p, ε_{p+1}, ... les corrections ordinaires de la formule pour les limites o et 1 ; puis, en ajoutant les résultats partiels et remarquant que $\Sigma 1 = \mu$, $\sum i = \frac{\mu(\mu-1)}{2}$, ...,

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\mu}\sum^{i}\sum A_0\varphi\left(\frac{i+a_0}{\mu}\right) + \frac{k_p\varepsilon_p}{\mu^p} + \frac{k_{p+1}}{\mu^{p+1}}\left[\varepsilon_{p+1} + \frac{\mu-1}{2}(p+1)\varepsilon_p\right] + \dots,$$

de sorte que l'erreur se trouve diminuée, à peu près, dans le rapport de 1 à $\frac{1}{\mu^p}$.

C'est de cette manière, par exemple, que la règle de Simpson est dérivée de la formule de Cotes, fondée sur l'emploi d'ordonnées équidistantes. Les limites o et 1 étant ici comprises parmi les abscisses a, b, ..., et la dernière ordonnée de chaque intégrale partielle coïncidant avec la première de l'intégrale suivante, le nombre des termes à calculer n'est plus $n\mu$, mais seulement $(n-1)\mu+1$.

2. Lorsque les n abscisses sont choisies arbitrairement, il reste à déterminer n coefficients par autant d'équations de condition ($p = n$), et l'on peut ainsi atteindre le degré de précision $n-1$. Si l'on se donne, au contraire, les coefficients, il faut tenir compte de la condition que fournissent les relations (3) ou (3 *bis*) pour $h = 0$, à savoir,

$$\sum A = \beta - \alpha \quad \text{ou} \quad \sum A = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx,$$

et, en ajoutant $p - 1 = n$ relations qui déterminent les abscisses, on peut atteindre le degré n

Il y a, en général, avantage à employer des ordonnées *symétriques*,

prises deux à deux à égale distance des extrêmes. On a dans ce cas, pour les limites o et 1,

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = 1$$

et pour les limites ± 1,

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = 0,$$

et, si n est un nombre impair, l'abscisse moyenne est respectivement égale à $\frac{1}{2}$ ou à o.

En adoptant les limites ± 1, on aura donc les systèmes suivants d'abscisses symétriques :

Pour $n = 2i$......... $\pm a_1, \ \pm a_2, \ \ldots, \ \pm a_i,$

Pour $n = 2i + 1$..... $0, \ \pm a_1, \ \pm a_2, \ \ldots, \ \pm a_i.$

Les relations (3) donnent alors, en y écrivant $2h + 1$ à la place de h,

$$(7) \qquad \Sigma A a^{2h+1} = 0,$$

ou bien, en désignant par A_p, A_{-p} les coefficients des ordonnées conjuguées $\varphi(a_p)$, $\varphi(-a_p)$,

$$(7 \ bis) \qquad \Sigma (A_p - A_{-p}) a_p^{2h+1} = 0,$$

et ces équations sont satisfaites en prenant $A_p = A_{-p}$. L'égalité des coefficients conjugués est d'ailleurs nécessaire si l'on veut atteindre le degré de précision $n - 1$, car le nombre des équations (7 *bis*) est alors au moins égal à i, et elles exigent que les i différences $A_p - A_{-p}$ s'annulent. Ainsi, lorsqu'on fait usage d'ordonnées symétriques, il faut que, dans la formule (1), les coefficients conjugués soient égaux si la formule doit atteindre le degré de précision $n - 1$, et cette règle s'applique aussi aux limites o et 1, puisque les valeurs relatives des coefficients sont indépendantes des limites.

Pour les limites ± 1, les relations (3) se réduisent dès lors aux sui-

vantes, qui ne renferment que les puissances paires des abscisses :

$$(8)\left\{\begin{array}{l|l} \quad n=2i+1. & \quad n=2i. \\ \frac{1}{2}A_0+A_1+\ldots+A_i=1, & A_1+\ldots+A_i=1, \\ A_1a_1^2+\ldots+A_ia_i^2=\frac{1}{3}, & A_1a_1^2+\ldots+A_ia_i^2=\frac{1}{3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1a_1^{2k}+\ldots+A_ia_i^{2k}=\frac{1}{2k+1}, & A_1a_1^{2k}+\ldots+A_ia_i^{2k}=\frac{1}{2k+1}, \end{array}\right.$$

et le degré de précision devient $2k+1$, puisque l'équation $\Sigma A a^{2k+1}=0$ est encore satisfaite. On voit aisément qu'il ne peut dépasser $2n-1$. On voit aussi qu'en choisissant arbitrairement les abscisses $a_1, \ldots, a_i$ on atteindra le degré $2i+1$ avec $2i+1$ ou $2i+2$ ordonnées symétriques, tandis qu'on l'atteindra avec $2i$ ou $2i+1$ ordonnées en se donnant tous les coefficients. Dans les deux cas, le degré de précision est égal à n, si n est un nombre impair; mais, si n est un nombre pair, il devient dans le premier cas $n-1$ et dans le second $n+1$.

Les formules du type (2) donnent lieu à des remarques analogues, si $f(x)$ est une fonction paire, c'est-à-dire de la forme $f(x^2)$, car alors on a encore $\Sigma A a^{2k+1}=0$. Mais si $f(x)$ est une fonction impaire, de la forme $xf(x^2)$, on aura $\Sigma A a^{2k}=0$ ou bien, pour des ordonnées symétriques,

$$\Sigma(A_p+A_{-p})a_p^{2k}=0,$$

et il faudra faire $A_{-p}=-A_p$, c'est-à-dire donner aux ordonnées conjuguées des coefficients égaux, mais de signes contraires. En même temps, $A_0=0$; on ne pourra donc prendre qu'un nombre pair d'ordonnées symétriques.

5. Les équations (3), ou le système (8) qui en découle, offrent souvent le moyen le plus simple de déterminer les constantes qui entrent dans la formule de quadrature (1), surtout lorsque l'on connaît d'avance un certain nombre de ces constantes. M. Scheibner a donné, en 1856, une méthode pour les résoudre dans le cas où toutes les constantes sont à déterminer ($p=2n$); il nous suffira d'en indiquer le principe. Soit

$$F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n);$$

les abscisses a seront les racines de l'équation

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + x^n = 0.$$

Le degré de précision de la formule (1) étant maintenant $2n - 1$, on pourra faire $\varphi(x) = x^h F(x)$, en donnant à h les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$, et la formule (1) donnera, dans ces cas,

$$\int_0^1 x^h F(x)\, dx = 0.$$

On aura ainsi n relations linéaires de la forme

$$\frac{c_0}{h+1} + \frac{c_1}{h+2} + \ldots + \frac{1}{n+h+1} = 0,$$

qui suffiront pour déterminer les n coefficients $c_0, c_1, \ldots$. Mais nous n'aurons pas à faire usage de cette méthode.

4. Soit encore $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots$, et considérons la fonction entière du degré $n-1$

$$F_a(x) = \frac{F(x)}{x-a}.$$

Je supposerai désormais que la formule (1) atteint *au moins le degré* $n-1$. Dans ce cas, elle reste exacte en posant $\varphi(x) = F_a(x)$, et il vient

$$\int_\alpha^\beta F_a(x)\, dx = A F_a(a),$$

puisque les autres termes s'annulent. En même temps, $F_a(a) = F'(a)$; par suite,

(9) $$A = \frac{1}{F_a(a)} \int_\alpha^\beta F_a(x)\, dx = \frac{1}{F'(a)} \int_\alpha^\beta \frac{F(x)}{x-a}\, dx.$$

On arrive au même résultat en partant de la formule d'interpolation

(10) $$\varphi(x) = \sum \varphi(a) \frac{F_a(x)}{F_a(a)},$$

qui se trouve *exacte* toutes les fois que le degré de $\varphi(x)$ ne dépasse pas $n-1$. L'intégration donne, en effet,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \Sigma A \varphi(a),$$

où les coefficients A sont définis par les relations (9). Le résultat est exact si le degré de $\varphi(x)$ ne dépasse pas $n-1$. Soit maintenant

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + \ldots + k_{n+m} x^{n+m}.$$

En divisant $\varphi(x)$ par $F(x)$, on aura d'abord un quotient Q du degré m, puis un reste du degré $n-1$ au plus, qui, devant coïncider avec $\varphi(x)$ pour $x=a$, $x=b$, ..., se trouve par là même déterminé et pourra être représenté par le côté droit de l'équation (10), de sorte que

$$\varphi(x) = \sum \varphi(a)\frac{F_a(x)}{F_a(a)} + Q\,F(x).$$

L'intégration donne

(11) $$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \sum A \varphi(a) + \int_\alpha^\beta QF(x)\,dx,$$

où la dernière intégrale représente évidemment les termes de correction $k_p \varepsilon_p$, ... de la formule (5). En posant $p = n+m$, le degré de précision devient $n+m-1$, et il faut pour cela que l'on ait

$$\int_\alpha^\beta Q\,F(x)\,dx = 0$$

toutes les fois que, $\varphi(x)$ étant d'un degré inférieur à $n+m$, le degré du polynôme Q ne dépasse pas $m-1$. Il faut donc qu'on ait

(12) $$\int_\alpha^\beta x^h F(x)\,dx = 0 \quad (h = 0, 1, \ldots, m-1),$$

ce qu'on démontre aussi en faisant $\varphi(x) = x^h F(x)$. Les relations (12) représentent m conditions auxquelles doivent satisfaire les abscisses a, b, ... si l'on veut atteindre le degré de précision $n+m-1$.

Remarquons en passant qu'avec un nombre impair d'ordonnées symétriques la condition $\int F(x)dx = 0$ est toujours remplie; cela saute aux yeux quand les limites sont ± 1, puisque $F(x)$ est alors une fonction impaire, et il est facile de voir que le résultat sera le même pour d'autres limites, une substitution linéaire ne pouvant changer la forme des facteurs $(x-a)$, $(x-b)$, ... dont se compose $F(x)$. Le degré de précision sera donc égal à n, comme nous l'avons déjà vu plus haut. En considérant la forme des expressions (9), on pourrait aussi démontrer directement l'égalité des coefficients des ordonnées symétriques conjuguées.

5. Soient toujours

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + \ldots \quad \text{et} \quad F(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots$$

En désignant par le symbole E la *partie entière* d'une fonction ou le quotient d'une division, nous aurons

$$(13) \qquad Q = k_n \mathrm{E}\frac{x^n}{F(x)} + k_{n+1}\mathrm{E}\frac{x^{n+1}}{F(x)} + \ldots$$

ou bien

$$(14) \qquad Q = \frac{k_n + x k_{n+1} + \ldots}{1 + \frac{1}{x}c_{n-1} + \ldots} = k_n + (x - c_{n-1})k_{n+1} + \ldots,$$

et, en substituant cette expression dans (11), on obtient les termes $k_p\varepsilon_p$, $k_{p+1}\varepsilon_{p+1}$, ... qui figurent dans l'équation (5). On suppose ici p au moins égal à n. Le coefficient de k_{n+s} devient

$$(15) \qquad \varepsilon_{n+s} = \int_a^\beta F(x)\,dx\,\mathrm{E}\frac{x^{n+s}}{F(x)},$$

où

$$\mathrm{E}\frac{x^{n+s}}{F(x)} = x^s - c_{n-1}x^{s-1} + (c_{n-1}^2 - c_{n-2})x^{s-2} - \ldots.$$

Or cette expression est le coefficient de $\frac{1}{z^{s+1}}$ dans le développement de

$$\mathrm{E}\frac{x^n}{(z-x)F(x)} = \frac{z^n}{(z-x)F(z)}.$$

et il s'ensuit que ε_{n+s} sera le coefficient de $\frac{1}{z^{s+1}}$ dans

$$\frac{z^n}{F(z)}\int_\alpha^\beta \frac{F(x)}{z-x}dx.$$

La formule (6) devient ainsi

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{z-x} = \sum \frac{A}{z-a} + \frac{1}{F(z)}\int_\alpha^\beta \frac{F(x)}{z-x}dx, \tag{16}$$

et le dernier terme représente ce qu'on peut appeler la *fonction génératrice* des ε, car ε_{n+s} est le coefficient de $\frac{1}{z^{n+s+1}}$ dans le développement de ce terme.

Lorsqu'on a $p = n+m$, le degré de précision devient $n+m-1$ et les ε s'annulent depuis ε_n jusqu'à ε_{n+m-1}. Dès lors, les équations (15) et (16) peuvent être remplacées par les suivantes,

$$\varepsilon_{n+m+s} = \int_\alpha^\beta x^m F(x)\,dx\,\mathrm{E}\,\frac{x^{n+s}}{F(x)}, \tag{15 bis}$$

et

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{z-x} = \sum \frac{A}{z-a} + \frac{1}{z^m F(z)}\int_\alpha^\beta \frac{x^m F(x)}{z-x}\,dx, \tag{16 bis}$$

en supprimant les termes qui s'annulent en vertu de (12). Pour des ordonnées symétriques et les limites ± 1, on aura $\varepsilon_p = 0$ toutes les fois que p sera impair.

6. La fonction entière

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = c_1 + c_2(x+a) + c_3(x^2+ax+a^2) + \ldots$$

peut s'exprimer par

$$\mathrm{E}\,\frac{F(x)}{x-a} = \mathrm{E}\,\frac{F(a)}{a-x},$$

où

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \ldots \quad \text{et} \quad \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \ldots,$$

et, si a est une racine de $F(x)=0$, cette fonction s'identifie avec

$$F_a(x)=\frac{F(x)}{x-a}.$$

On aura donc

$$\int_\alpha^\beta F_a(x)\,dx = E\,F(a)\int_\alpha^\beta \frac{dx}{a-x} = E\,F(a)\log\frac{a-\alpha}{a-\beta}.$$

Or cette intégrale, que nous désignerons par $R(a)$, n'est autre chose que le numérateur du rapport par lequel nous avons exprimé le coefficient A. On aura donc, pour les limites ± 1,

$$A=\frac{R(a)}{F'(a)}=\frac{1}{F'(a)}\,E\,F(a)\log\frac{a+1}{a-1}, \tag{17}$$

où il faut faire

$$\log\frac{a+1}{a-1}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3a^3}+\frac{1}{5a^5}+\ldots\right).$$

Cette expression des coefficients A, qui est due à Gauss, suppose que la formule (1) possède au moins le degré de précision $n-1$, comme nous l'avons admis au n° 4. Si elle atteint le degré $2n-3$, on peut obtenir une autre expression des coefficients A en posant

$$\varphi(x)=2F_a(x)F'_a(x).$$

En effet, l'intégration donne alors

$$F_a^2(\beta)-F_a^2(\alpha)=2A\,F_a(a)F'_a(a),$$

les autres termes de la somme étant nuls. En différentiant l'équation $(x-a)F_a(x)=F(x)$, on trouve encore

$$F_a(a)=F'(a),\quad 2F'_a(a)=F''(a),\quad \ldots;$$

par conséquent, les limites étant ± 1,

$$\frac{F^2(1)}{(1-a)^2}-\frac{F^2(-1)}{(1+a)^2}=A\,F'(a)\,F''(a). \tag{18}$$

Pour des ordonnées symétriques, $F^2(1) = F^2(-1)$, et l'équation (18) devient

$$A = \frac{4a}{(1-a^2)^2} \frac{F^2(1)}{F'(a)F''(a)}. \tag{19}$$

Si la racine a coïncide avec l'une des limites ($a = 1$), on aura

$$F_a(1) = F'(1),$$

par conséquent, en désignant son coefficient par K,

$$F'^2(1) - \tfrac{1}{4}F^2(-1) = KF'(1)F''(1), \tag{20}$$

et une formule analogue pour $a = -1$.

7. Le système d'équations (12), qui exprime les conditions à remplir si la formule (1) doit atteindre le degré de précision $n + m - 1$, peut être présenté sous une autre forme. $F(x)$ étant du degré n, posons

$$F(x) = D_x^m V, \quad \text{où} \quad V = ax^m + bx^{m+1} + \ldots + x^{n+m}.$$

En supposant, pour simplifier, que les limites sont 0 et 1, on aura d'abord

$$\int_0^1 F(x)\,dx = \Big\|^{x=1} D_x^{m-1} V = 0,$$

puis

$$\int_0^1 xF(x)\,dx = -\Big\|^{x=1} D_x^{m-2} V = 0,$$

et ainsi de suite; en d'autres termes, V et ses $m - 1$ premières dérivées devront s'annuler pour $x = 1$, comme elles s'annulent déjà pour $x = 0$. Par conséquent,

$$V = x^m(x-1)^m(x^{n-m}),$$

où (x^{n-m}) signifie un polynôme du degré $n - m$, dont les coefficients restent arbitraires. En écrivant maintenant $\frac{x+1}{2}$ à la place de x, on trouve, pour les limites ± 1,

$$F(x) = D_x^m[(x^2-1)^m(x^{n-m})]. \tag{21}$$

C'est la forme que doit avoir $F(x)$ pour que le degré de précision devienne $n+m-1$. Avec $m=n$ on atteint le degré $2n-1$, et l'on a

$$(22) \qquad F(x) = D_x^n(x^2-1)^n = 0.$$

C'est l'équation qui fournit les racines a, b, ... dans la méthode de Gauss (on sait que c'est Jacobi qui lui a donné cette forme). Ces racines sont toutes réelles et comprises entre o et ± 1.

En nous contentant d'un degré de précision moindre, nous pouvons disposer à volonté des constantes que renferme (x^{n-m}). Prenant, par exemple, $m=n-1$, nous pourrons faire

$$(23) \qquad F(x) = D_x^{n-1}[(x^2-1)^{n-1}(x \pm 1)] = 0,$$

en comprenant parmi les abscisses (qui seront asymétriques) l'une des deux limites de l'intégrale (± 1). Pour avoir des abscisses symétriques, il faudrait ici faire $(x^{n-m}) = x$, et l'on retomberait sur la méthode de Gauss. Prenant ensuite $m=n-2$, nous pourrons utiliser les deux limites en faisant

$$(24) \qquad F(x) = D_x^{n-2}(x^2-1)^{n-1} = 0.$$

Afin d'exprimer ces résultats à l'aide des polynômes de Legendre, posons

$$D_x^n(x^2-1)^n = 1.2\ldots n.2^n.P_n(x) \quad \text{et} \quad D_x P_n = P'_n.$$

Les équations (22), (23) et (24) deviendront :

$$(22\ bis) \qquad P_n(x) = 0 \quad \text{(degré de préc., } 2n-1),$$

$$(23\ bis) \qquad (x \pm 1)P_{n-1} + \frac{1}{n}(x^2-1)P'_{n-1} = 0 \quad \text{(degré de préc., } 2n-2),$$

$$(24\ bis) \qquad (x^2-1)P'_{n-1} = 0 \quad \text{(degré de préc., } 2n-3).$$

On voit que l'équation (24 *bis*) fournit le degré de précision $2n-1$ avec $n+1$ ordonnées, parmi lesquelles sont comprises $\varphi(+1)$ et $\varphi(-1)$, et, dans le cas où $\varphi(x)$ s'annule pour $x = \pm 1$, on n'aura à calculer que $n-1$ ordonnées, c'est-à-dire une de moins que dans la méthode de Gauss.

8. Pour revenir au cas général, soient a, b, c, ..., p les $n-m$ racines arbitrairement choisies. Nous aurons d'une part

$$F(x) = D_x^m[(x^2-1)^m(x^{n-m})]$$

et de l'autre, a étant l'une quelconque des racines données,

$$0 = D_a^m[(a^2-1)^m(a^{n-m})].$$

Ce système de $n-m$ équations détermine les coefficients du polynôme $(x^{n-m}) = \alpha + \beta x + \ldots + x^{n-m}$, et l'on voit tout de suite que $F(x)$ aura pour expression le déterminant

$$(25)\quad \Sigma \pm D_x^m D_a^m D_b^m \ldots [(x^2-1)^m(a^2-1)^m(b^2-1)^m \ldots \Pi(a, b, \ldots, p, x)],$$

où $\Pi(a, b, \ldots, p, x)$ signifie le produit des différences

$$(b-a)(c-a)\ldots(x-p).$$

Cette expression de $F(x)$ avait été déjà donnée par M. Christoffel (*Journal de Crelle*, t. LV); mais nous y sommes arrivé par une autre voie.

Quand les racines a, b, ... sont symétriques ($\pm a$, $\pm b$, ...), le polynôme (x^{n-m}) ne renferme que des puissances de même parité, et l'expression de $F(x)$ se simplifie, car le nombre des équations à résoudre se trouve alors réduit de moitié. Soit d'abord $n-m=2s$; on aura s équations de la forme

$$0 = D_a^m[(a^2-1)^m(a^{2s})],$$

qui donneront

$$(26)\quad \begin{cases} F(x) = \Sigma \pm D_x^m D_a^m D_b^m \ldots \\ \qquad\qquad \times [(x^2-1)^m(a^2-1)^m(b^2-1)^m \ldots \Pi(a^2, b^2, \ldots, x^2)]. \end{cases}$$

Remarquons maintenant que

$$D_x^m[(x^2-1)^m(x^{2s})] = D_x^{m-1}[(x^2-1)^{m-1}(x^{2s+1})],$$

où les deux polynômes (x^{2s}) et (x^{2s+1}) ont le même nombre de coef-

ficients et peuvent, par conséquent, se déduire l'un de l'autre. En faisant usage de cette transformation, on trouve

$$(27)\quad \begin{cases} F(x) = \Sigma \pm D_x^{m-1} D_a^{m-1} \ldots \\ \qquad \times [(x^2-1)^{m-1}(a^2-1)^{m-1} \ldots ab \ldots x . \Pi(a^2, b^2, \ldots, x^2)]. \end{cases}$$

Soit, par exemple, $n = 3$, $m = 1$, $s = 1$ (degré de précision, 3). L'équation (26) donnera

$$F(x) = D_x D_a (x^2-1)(a^2-1)(x^2-a^2) = 8ax(x^2-a^2),$$

et l'équation (27), directement,

$$F(x) = ax(x^2-a^2).$$

9. Il faut maintenant déterminer les coefficients de la formule de Gauss. En faisant $F(x) = P_n$, et $F(a) = 0$, l'équation bien connue

$$(x^2-1)P_n'' + 2xP_n' = n(n+1)P_n$$

fournit la relation

$$(1-a^2)F''(a) = 2a . F'(a).$$

En même temps, $F^2(1) = 1$, et (19) donne

$$(28)\qquad A = \frac{2}{1-a^2}\frac{1}{F'^2(a)}.$$

En rapprochant (28) de (17), on trouve

$$(1-a^2)R(a) . F'(a) = 2,$$

d'où enfin

$$A = \frac{R(a)}{F'(a)} = \frac{1-a^2}{2}R^2(a) = \frac{2}{1-a^2}\frac{1}{F'^2(a)}.$$

De ces expressions, les deux premières avaient été données par Gauss; la troisième est due à M. Christoffel, mais elle découle des deux premières. La seconde expression est une fonction entière de a, du degré $2n$. Gauss fait observer qu'elle peut être remplacée par le reste que laisse la division par $F(a)$, puisque $F(a) = 0$. Ce reste sera du

degré $n-2$ si n est un nombre pair; dans le cas de n impair, on aura aussi $\frac{1}{a}F(a)=0$, en faisant abstraction de la racine $x=0$, et, en divisant par $\frac{1}{a}F(a)$, on trouvera un reste du degré $n-3$.

Lorsque n est impair, le coefficient qui correspond à la racine zéro a pour valeur

$$A_0=\frac{2}{F'^2(0)}=2\left(\frac{2.4\ldots n-1}{3.5\ldots n}\right)^2;$$

en même temps, le calcul des autres coefficients peut être simplifié par cette remarque, qu'en vertu de l'équation $P_n(a)=0$ on a

$$P'_n(a)=\frac{1}{a}P'_{n-1}(a).$$

Les relations (8) et (28) montrent que les coefficients sont des fractions positives $(0<A<1)$.

Les formules (15) et (16), ou (15 *bis*) et (16 *bis*), déterminent les corrections ε. Pour les limites ± 1, on a d'abord $\varepsilon_{2n+1}=0$, $\varepsilon_{2n+3}=0,\ldots$, puis

$$(29)\quad \varepsilon_{2n}=\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots 2n}\int_{-1}^{+1}x^n D_x^n(x^2-1)^n\,dx=\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1.2\ldots n}{1.3\ldots 2n-1}\right)^2.$$

En posant

$$Q_n(z)=\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(x)}{z-x}\,dx,$$

on voit que ε_p sera le coefficient de $\frac{1}{z^{p+1}}$ dans le développement de $\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}$, par conséquent ε_{2n+2s} celui de $\frac{1}{z^{2s}}$ dans le développement de

$$(30)\qquad z^{2n+1}\frac{Q_n(z)}{P_n(z)}=\varepsilon_{2n}\frac{1+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\frac{1}{z^2}+\ldots}{1-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\frac{1}{z^2}+\ldots}.$$

On trouve ainsi

$$\varepsilon_{2n+2}=\varepsilon_{2n}\frac{2n+1}{2n+3}\,\frac{n^2+n-1}{2n-1},$$

et $\varepsilon_{2n+2} > \varepsilon_{2n}$ à partir de $n=2$. Mais en même temps $\varepsilon_{2n} < \frac{2}{2n+1}$, $\varepsilon_{2n+2} < \frac{2}{2n+3}$ (¹).

En désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les coefficients de $\frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^4}, \cdots$ dans la série infinie qui forme le numérateur de l'expression (30), et par $-\mu_1$, $+\mu_2, \ldots$ les coefficients de la série finie qui figure au dénominateur, on aurait aussi

$$\varepsilon_{2p} - \mu_1 . \varepsilon_{2p-2} + \mu_2 \, \varepsilon_{2p-4} - \ldots = \varepsilon_{2n} . \lambda_{p-n}.$$

On a d'ailleurs

$$P_1 = x, \quad \frac{2}{3} P_2 = x^2 - \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5} P_3 = x^3 - \frac{3}{5} x,$$

$$\frac{8}{35} P_4 = x^4 - \frac{6}{7} x^2 + \frac{3}{35}, \quad \frac{8}{63} P_5 = x^5 - \frac{10}{9} x^3 + \frac{5}{21} x,$$

$$\frac{16}{231} P_6 = x^6 - \frac{15}{11} x^4 + \frac{5}{11} x^2 - \frac{5}{231},$$

$$\frac{16}{429} P_7 = x^7 - \frac{21}{13} x^5 + \frac{105}{143} x^3 - \frac{35}{429} x,$$

$$\frac{128}{6435} P_8 = x^8 - \frac{28}{15} x^6 + \frac{14}{13} x^4 - \frac{28}{143} x^2 + \frac{7}{1287},$$

$$\frac{128}{12155} P_9 = x^9 - \frac{36}{17} x^7 + \frac{126}{85} x^5 - \frac{84}{221} x^3 + \frac{63}{2431} x.$$

On trouve ainsi (limites ± 1) :

Pour $n=1$. $a=0$, $A=2$, $\varepsilon_2 = \frac{2}{3}$, $\varepsilon_4 = \frac{2}{5}$, $\varepsilon_6 = \frac{2}{7}$, $\cdots$

$n=2$. $a = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $A=1$, $\varepsilon_4 = \frac{8}{45}$, $\varepsilon_6 = \frac{40}{189}$, $\varepsilon_8 = \frac{16}{81}$, $\cdots$;

$n=3$. $a = 0$ et $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $A = \frac{8}{9}$ et $\frac{5}{9}$, $\varepsilon_6 = \frac{8}{175}$, $\varepsilon_8 = \frac{88}{1125}$, $\varepsilon_{10} = \frac{656}{6875}$, $\cdots$,

$n=4$. $a^2 = \frac{3}{7} \pm \frac{2}{7} \sqrt{\frac{6}{5}}$, $A = \frac{18 \mp \sqrt{30}}{36}$, $\varepsilon_8 = \frac{128}{11025}$, $\varepsilon_{10} = \frac{171}{77} \varepsilon_8$;

$n=5$. $a^2 = 0$ et $\frac{5}{9} \pm \frac{2}{9} \sqrt{\frac{10}{7}}$, $A = \frac{128}{225}$ et $\frac{322 \mp 13\sqrt{70}}{900}$, $\varepsilon_{10} = \frac{128}{43659}$, $\varepsilon_{12} = \frac{319}{117} \varepsilon_{10}$.

(¹) Sur les corrections de la formule de Gauss, voyez : Jacobi (*Journal de Crelle*, t. Ier) ; Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, p. 289, et une Note de M. Callandreau (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 3 mai 1880).

Gauss a donné les valeurs numériques des racines et des coefficients jusqu'à $n = 7$; je les ai encore calculées pour $n = 8$, 9 et 10. Le Tableau suivant contient : dans les deux premières colonnes, les racines conjuguées a et 1 — a pour les limites 0 et 1; dans la troisième, les coefficients A pour les mêmes limites (en les doublant, on aura les coefficients pour les limites ± 1); dans la quatrième, les racines a pour les limites ± 1.

	a.	1 — a.	A.	a.
$n = 2$..	0,21132487	0,78867513	0,5	±0,57735027
$n = 3$..	0,11270167	0,88729833	0,27777778	±0,77459667
	0,5		0,44444444	0
$n = 4$..	0,06943184	0,93056816	0,17392742	±0,86113631
	0,33000948	0,66999052	0,32607258	±0,33998104
$n = 5$..	0,04691008	0,95308992	0,11846344	±0,90617985
	0,23076534	0,76923466	0,23931434	±0,53846931
	0,5		0,28444444	0
$n = 6$..	0,03376524	0,96623476	0,08566225	±0,93246951
	0,16939531	0,83060469	0,18038079	±0,66120939
	0,38069041	0,61930959	0,23395697	±0,23861919
$n = 7$..	0,02544604	0,97455396	0,06474248	±0,94910791
	0,12923441	0,87076559	0,13985270	±0,74153119
	0,29707742	0,70292258	0,19091503	±0,40584515
	0,5		0,20897959	0
$n = 8$..	0,0198550718	0,9801449282	0,0506142681	±0,9602898565
	0,1016667613	0,8983332387	0,1111905172	±0,7966664774
	0,2372337950	0,7627662050	0,1568533229	±0,5255324099
	0,4082826788	0,5917173212	0,1813418917	±0,1834346425
$n = 9$..	0,0159198802	0,9840801198	0,0406371942	±0,9681602395
	0,0819844463	0,9180155537	0,0903240804	±0,8360311073
	0,1933142836	0,8066857164	0,1303053482	±0,6133714327
	0,3378732883	0,6621267117	0,1561735385	±0,3242534234
	0,5		0,1651196775	0
$n = 10$.	0,0130467357	0,9869532643	0,0333356722	±0,9739065285
	0,0674683167	0,9325316833	0,0747256746	±0,8650633667
	0,1602952159	0,8397047841	0,1095431813	±0,6794095683
	0,2833023029	0,7166976971	0,1346333597	±0,4333953941
	0,4255628305	0,5744371695	0,1477621124	±0,1488743390

Voici les corrections ε_{2n} pour les mêmes systèmes :

		lim. o et 1.	lim. ± 1.
$n=2$	....	$\varepsilon_4 = \frac{1}{180} = 0,0055556$	0,17778
$n=3$	....	$\varepsilon_6 = \frac{1}{2800} = 0,00035714$	0,045714
$n=4$	....	$\varepsilon_8 = \frac{1}{44100} = 0,00002268$	0,011610
$n=5$	....	$\varepsilon_{10} = 0,000001431549$	0,002932
$n=6$	....	$\varepsilon_{12} = 0,000000090098$	0,000738
$n=7$	....	$\varepsilon_{14} = 0,000000005660$	0,000186
$n=8$	....	$\varepsilon_{16} = 0,000000000355$	0,000047
$n=9$	....	$\varepsilon_{18} = 0,000000000022$	0,000012
$n=10$	....	$\varepsilon_{20} = 0,000000000001$	0,000003

On voit que, pour les limites ± 1, chaque correction ε est à peu près $\frac{1}{4}$ de la précédente $\left(\frac{1}{16}\right.$ de la précédente pour les limites o et $\left.1\right)$.

10. Lorsqu'on veut se servir de l'équation (23 *bis*), en prenant

$$F(x) = (x+1)P_{n-1} + \frac{1}{n}(x^2-1)P'_{n-1},$$

on a d'abord

$$(x^2-1)F'' + (x+1)F' = n^2.F,$$

puis

$$F(1) = 2, \quad F(-1) = 0, \quad (1-a)F''(a) = F'(a) = 2P'_{n-1}(a),$$

et (18) donne

$$A = \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{P'^2_{n-1}(a)}. \tag{32}$$

Pour la racine -1, on a $F'^2(-1) = n^2$, et l'équation (20) donne

$$K = \frac{2}{n^2}.$$

On trouve ainsi, par exemple :

Pour $n=2$ (degré de précision, 2) :

$$a = -1, \quad +\frac{1}{3}, \quad A = \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2};$$

Pour $n = 3$ (degré de précision, 4)

$$a = -1, \quad \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}, \quad A = \frac{2}{9}, \quad \frac{16 \mp \sqrt{6}}{18}.$$

Ces constantes se rapportent aux limites ± 1. Pour les limites 0 et 1, on prendrait

$$n = 2, \quad a = 0, \quad \frac{2}{3}, \quad A = \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \cdots$$

La détermination des coefficients devient un peu plus difficile lorsqu'on veut se servir de l'équation (24 *bis*), en faisant

$$F(x) = (x^2 - 1)P'_{n-1},$$

de sorte que les racines ± 1 viennent s'ajouter à celles de $P'_{n-1} = 0$. On a, dans ce cas,

$$F' = n(n-1)P_{n-1}, \quad F'' = n(n-1)P'_{n-1}, \quad (x^2-1)F'' = n(n-1)F,$$

puis

$$F'(1) = n(n-1), \quad 2F''(1) = n^2(n-1)^2,$$

et (20) donne, pour les deux racines ± 1,

$$K = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Mais (18) donne $0 = 0$. Pour obtenir les autres coefficients, nous poserons

$$F(x) = (x-1)(x-a)f(x).$$

En prenant $\varphi(x) = 2f.f'$, la formule (1) donne

$$f^2(1) = 2Af(a).f'(a) + 2Kf(1).f'(1),$$

les autres termes étant nuls; ensuite

$$F'(1) = (1-a)f(1), \quad \frac{1}{2}F''(1) = f(1) + (1-a)f'(1),$$

$$F'(a) = (a-1)f(a), \qquad 0 = f(a) + (a-1)f'(a),$$

et, en substituant, il vient

$$(33)\qquad A = K\frac{F'^2(1)}{F'^2(a)} = \frac{K}{P_{n-1}^2(a)}.$$

On peut faciliter le calcul des coefficients A en observant qu'en vertu de l'équation $P'_{n-1}(a) = 0$ on a

$$-P_{n-1}(a) = \frac{1}{n-1}P'_{n-2}(a) = \frac{1}{2n-3}\,\frac{1}{a}\,P'_{n-3}(a).$$

Lorsque n est impair, le coefficient de la racine zéro a pour valeur

$$A_0 = K\left(\frac{2.4\ldots n-1}{3.5\ldots n-2}\right)^2 = \frac{2n}{n-1}\left(\frac{2.4\ldots n-1}{3.5\ldots n}\right)^2.$$

La relation (33) peut aussi s'obtenir comme il suit. En prenant $\varphi(x) = f.F'$, la formule (1) donne

$$\int_{-1}^{+1} f F'dx = \frac{A}{a-1}F'^2(a) + \frac{K}{1-a}F'^2(1).$$

Or la même intégrale peut s'écrire

$$n(n-1)\int_{-1}^{+1}\frac{x+1}{x-a}PP'dx = n(n-1)(a+1)\int_{-1}^{+1}\frac{P.P'}{x-a}dx,$$

et l'on a (¹)

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P.P'}{x-a}dx = P'(a)\int_{-1}^{+1}\frac{P}{x-a}dx = 0,$$

puisque a est une racine de l'équation $P'(a) = 0$. On en conclut que

$$A\,F'^2(a) - K\,F'^2(1) = 0.$$

Pour $n=2$ et $n=3$, cette méthode coïncide avec celle de Cotes. Pour $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$, les abscisses qui s'ajoutent à ± 1 se

---

(¹) F. Neumann, *Beitr. zur Theorie der Kugelfunctionen*, p. 155, nº 25.

déterminent par les équations

$$5x^2 - 1 = 0, \quad 7x^3 - 3x = 0, \quad 3x^4 - 2x^2 + \frac{1}{7} = 0,$$

$$11x^5 - 10x^3 + \frac{5}{3}x = 0,$$

$$13x^6 - 15x^4 + \frac{45}{11}x^2 - \frac{5}{33} = 0, \quad \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{13}x^3 - \frac{1}{143}x = 0,$$

$$\frac{17}{7}x^8 - 4x^6 + 2x^4 - \frac{4}{13}x^2 + \frac{1}{143} = 0,$$

$$\frac{323}{21}x^9 - \frac{204}{7}x^7 + 18x^5 - 4x^3 + \frac{3}{13}x = 0.$$

On trouve ainsi :

Pour $n = 4$,

$$a = \pm 1, \quad \pm\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad A = \frac{1}{6}, \quad \frac{5}{6}.$$

Pour $n = 5$,

$$a = \pm 1, \quad \pm\sqrt{\frac{3}{7}}; \quad 0, \quad A = \frac{1}{10}, \quad \frac{49}{90}; \quad \frac{64}{90}.$$

Pour $n = 6$,

$$a = \pm 1, \quad \pm\sqrt{\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{7}}}, \quad A = \frac{1}{15}; \quad \frac{14 \mp \sqrt{7}}{30}.$$

Pour $n = 7$,

$$a = \pm 1, \quad \pm\sqrt{\frac{5}{11} \pm \frac{2}{11}\sqrt{\frac{5}{3}}}, \quad 0, \quad A = \frac{1}{21}, \quad \frac{124 \mp 7\sqrt{15}}{350}. \quad \frac{256}{525}.$$

Quant aux corrections ε, que nous désignerons ici par (ε), on démontre facilement, en se servant de la formule (16), que (ε_p) est le coefficient de $\frac{1}{z^{p+1}}$ dans le développement de $\frac{Q'_{n-1}(z)}{P'_{n-1}(z)}$. Par conséquent, si nous écrivons $n+1$ à la place de n, (ε_{2n+2s}) sera le coefficient de $\frac{1}{z^{2s}}$ dans le développement de

$$z^{2n+1}\frac{Q'_n(z)}{P'_n(z)} = -\varepsilon_{2n}\frac{n+1}{n}\,\frac{1 + \frac{(n+2)(n+3)}{2(2n+3)}\frac{1}{z^2} + \dots}{1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-1)}\frac{1}{z^2} + \dots},$$

où ε_{2n} est la quantité définie par la relation (29). On aura donc

$$(\varepsilon_{2n}) = -\frac{n+1}{n}\varepsilon_{2n}, \quad (\varepsilon_{2n+2}) = -\frac{(n+1)^2}{n(n+1)-1}\varepsilon_{2n+2}, \quad \ldots$$

et l'on voit que les corrections (ε_p) sont du même ordre de grandeur que les corrections ε_p de la formule de Gauss, mais de signes contraires. Il s'ensuit que, en combinant d'une manière convenable les résultats G, F tirés des deux formules, on peut annuler la première correction et diminuer fortement les suivantes; il suffit pour cela de prendre la moyenne $\frac{(n+1)G + nF}{2n+1}$. Cette moyenne aura le degré de précision $2n+1$, et ses corrections seront

$$[\varepsilon_{2n+2}] = -\frac{1}{2n+1}\,\frac{n+1}{n(n+1)-1}\varepsilon_{2n+2} = -\frac{n+1}{(2n-1)(2n+3)}\varepsilon_{2n}, \quad \ldots$$

Ainsi, pour $n=5$, ε_{10} étant prise pour unité, les corrections ε_{12}, ε_{14}, ... de la formule de Gauss sont fournies par la série

$$\frac{1 + \frac{21}{13}\frac{1}{z^2} + \frac{126}{65}\frac{1}{z^4} + \frac{462}{221}\frac{1}{z^6} + \ldots}{1 - \frac{10}{9}\frac{1}{z^2} + \frac{5}{21}\frac{1}{z^4}} = 1 + \frac{319}{117}\frac{1}{z^2} + \frac{13409}{2835}\frac{1}{z^4} + \frac{580943}{86751}\frac{1}{z^6} + \ldots,$$

et les corrections de la nouvelle formule (en laissant de côté le facteur $-\frac{6}{5}$) par la série

$$\frac{1 + \frac{28}{13}\frac{1}{z^2} + \frac{42}{13}\frac{1}{z^4} + \frac{924}{221}\frac{1}{z^6} + \ldots}{1 - \frac{2}{3}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{21}\frac{1}{z^4}} = 1 + \frac{110}{39}\frac{1}{z^2} + \frac{319}{63}\frac{1}{z^4} + \frac{23848}{3213}\frac{1}{z^6} + \ldots$$

Les valeurs relatives des corrections ε_{10}, ε_{12}, ..., (ε_{10}), (ε_{12}), ... s'expriment donc par les nombres

$$\begin{array}{llllll} G\ldots\ldots\ldots & +1, & +2{,}7265, & +4{,}7298, & +6{,}6967, & \ldots, \\ F\ldots\ldots\ldots & -\frac{6}{5}, & -\frac{6}{5}\,2{,}8205, & -\frac{6}{5}\,5{,}0635, & -\frac{6}{5}\,7{,}4223, & \ldots, \end{array}$$

et les corrections de la moyenne deviennent

$$\frac{6G+5F}{11}\ldots \quad 0, \quad -0{,}0513, \quad -0{,}1820, \quad -0{,}3958, \quad \ldots$$

On voit que ε_{10} disparaît et que ε_{12} se trouve réduite à $\frac{1}{54}$, ε_{14} à $\frac{1}{27}$ de sa valeur, etc.

Voici les valeurs des constantes pour la formule (24 *bis*); les racines a, 1 — a et les coefficients A sont donnés pour les limites 0 et 1.

	a.	1 — a.	A.	*a*.
$n = 4$..	0	1	0,08333333	± 1
	0,27639320	0,72360680	0,41666667	± 0,44721360
$n = 5$..	0	1	0,05	± 1
	0,17267316	0,82732684	0,27222222	± 0,65465367
	0,5		0,35555556	0
$n = 6$..	0	1	0,03333333	± 1
	0,11747234	0,88252766	0,18923748	± 0,76505532
	0,35738424	0,64261576	0,27742919	± 0,28523152
$n = 7$..	0	1	0,02380952	± 1
	0,08488805	0,91511195	0,13841302	± 0,83022390
	0,26557560	0,73442440	0,21587269	± 0,46884879
	0,5		0,24380952	0
$n = 8$..	0	1	0,01785714	± 1
	0,06412993	0,93587007	0.10535211	± 0,87174015
	0,20414991	0,79585009	0,17056135	± 0,59170018
	0,39535039	0,60464961	0,20622940	± 0,20929922
$n = 9$..	0	1	0,013888889	± 1
	0,0501210023	0,9498789977	0,0827476808	± 0,8997579954
	0,1614068602	0,8385931398	0,1372693563	± 0,6771862795
	0,3184412681	0,6815587319	0,1732142555	± 0,3631174638
	0,5		0,1857596372	0
$n = 10$.	0	1	0,0111111111	± 1
	0,0402330459	0,9597669541	0,0666529954	± 0,9195339082
	0,1306130674	0,8693869326	0,1124446710	± 0,7387738651
	0,2610375251	0,7389624749	0,1460213418	± 0,4779249498
	0,4173605212	0,5826394788	0,1637698806	± 0,1652789577
$n = 11$.	0	1	0,0090909091	± 1
	0,0329992848	0,9670007152	0,0548061366	± 0,9340014304
	0,1077582631	0,8922417369	0,0935849409	± 0,7844834737
	0,2173823365	0,7826176635	0,1240240521	± 0,5652353270
	0,3521209322	0,6478790678	0,1434395624	± 0,2957581356
	0,5		0,1501087977	0

Voici les corrections (ε) pour les mêmes systèmes :

		lim. o et 1.	lim. ± 1.
$n = 4$	....	$\varepsilon_6 = -\frac{1}{2100} = -0,00047619$	0,060952
$n = 5$	....	$\varepsilon_8 = -0,00002834$	0,014512
$n = 6$	....	$\varepsilon_{10} = -0,00000172$	−0,003518
$n = 7$	....	$\varepsilon_{12} = -0,000000105$	0,000861
$n = 8$	....	$\varepsilon_{14} = -0,0000000065$	0,000212
$n = 9$	....	$\varepsilon_{16} = -0,0000000040$	0,000053
$n = 10$	....	$\varepsilon_{18} = -0,000000000025$	−0,000013
$n = 11$	....	$\varepsilon_{20} = -0,0000000000015$	−0,000003

11. La méthode de Cotes est fondée sur l'emploi d'ordonnées *équidistantes*, qui correspondent aux abscisses

$$0,\quad \frac{1}{n-1},\quad \frac{2}{n-1},\quad \ldots,\quad \frac{n-2}{n-1},\quad 1 \quad (\text{lim o et 1})$$

ou bien

$$\pm 1,\quad \pm\frac{n-3}{n-1},\quad \pm\frac{n-5}{n-1},\quad \ldots,\quad (\text{lim} \pm 1).$$

Les coefficients conjugués sont égaux, et le degré de précision sera $n-1$ ou n, selon que n sera pair ou impair. Voici les valeurs des coefficients pour les limites o et 1 ; ces coefficients correspondent aux abscisses conjuguées

$$\begin{array}{llll} 0, & \frac{1}{n-1}, & \frac{2}{n-1}, & \ldots, \\ 1, & \frac{n-2}{n-1}, & \frac{n-3}{n-1}, & \ldots, \end{array}$$

auxquelles s'ajoute l'abscisse moyenne $\frac{1}{2}$ si n est impair.

$n = 1$...... $A = 1 \quad \left(a = \frac{1}{2}\right)$.

$n = 2$...... $A = \frac{1}{2} \quad (a = 0,\ 1)$.

$n = 3$...... $A = \frac{1}{6},\ \frac{4}{6} \quad \left(a = 0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$

$n=4 \ldots\ldots \quad A=\frac{1}{8}, \frac{3}{8} \quad \left(a=0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right).$

$n=5 \ldots\ldots \quad A=\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90} \quad \left(a=0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right).$

$n=6 \ldots\ldots \quad 288A=19,\ 75,\ 50.$

$n=7 \ldots\ldots \quad 840A=41,\ 216,\ 27,\ 272.$

$n=8 \ldots\ldots \quad 17280A=751,\ 3577,\ 1323,\ 2989.$

$n=9 \ldots\ldots \quad 28350A=989,\ 5888,\ -928,\ 10496,\ -4540.$

$n=10 \ldots\ldots \quad 89600A=2857,\ 15741,\ 1080,\ 19344,\ 5778.$

$n=11 \ldots\ldots \quad 598752A=16067,\ 106300,\ -48525,\ 272400,\ -260550,\ 427368.$

Voici encore les corrections ε_p pour les limites ± 1 et pour les limites 0 et 1 (celles-ci se déduisent des premières en divisant par 2^{p+1}).

	(lim ± 1.)	(lim 0 et 1.)
$n=1$	$\varepsilon_2=+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{12}=+0,0833333$
$n=2$	$\varepsilon_2=-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}=-0,1666667$
$n=3$	$\varepsilon_4=-\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{120}=-0,0083333$
$n=4$	$\varepsilon_4=-\frac{16}{135}$	$-\frac{1}{270}=-0,0037037$
$n=5$	$\varepsilon_6=-\frac{1}{21}$	$-\frac{1}{2688}=-0,0003720$
$n=6$	$\varepsilon_6=-\frac{352}{131275}$	$-\frac{11}{52500}=-0,0002095$
$n=7$	$\varepsilon_8=-\frac{16}{1215}$	$-\frac{1}{38880}=-0,0000257$
$n=8$	$\varepsilon_8=-\frac{42752}{5294205}$	$-\frac{167}{10588410}=-0,0000158$
$n=9$	$\varepsilon_{10}=-\frac{37}{8448}$	$-\frac{37}{17301504}=-0,0000021$
$n=10$	$\varepsilon_{10}=-\frac{110720}{39459493}$	$-\frac{865}{631351908}=-0,0000014$
$n=11$	$\varepsilon_{12}=-\frac{4174832}{2666015625}$	$-\frac{260927}{1365000000000}=-0,0000002$

La *méthode des trapèzes* revient à remplacer la courbe $y=\varphi(x)$ par un polygone inscrit. En faisant usage de n ordonnées équidi-

stantes, qui divisent l'aire à évaluer en $n-1=m$ trapèzes, on a

$$(34)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2}\varphi(0)+\varphi\left(\frac{1}{n-1}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{n-2}{n-1}\right)+\frac{1}{2}\varphi(1)\right] \\ \displaystyle\qquad = \frac{1}{m}\sum_1^{m-1}\varphi\left(\frac{h}{m}\right)+\frac{\varphi(0)+\varphi(1)}{2m}. \end{cases}$$

Cette formule devient déjà inexacte pour $\varphi(x)=x^2$; elle n'a que le degré de précision 1. Ce qui atténue l'erreur, c'est que les corections ε sont proportionnelles à $\frac{1}{m^2}$. En effet,

$$\begin{aligned} \varepsilon_p &= \int_0^1 x^p\,dx - \frac{1}{2m} - \frac{1}{m}\sum\left(\frac{h}{m}\right)^p \\ &= -\frac{p}{12m^2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{720m^4}-\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{30240m^6}+\ldots; \end{aligned}$$

par suite,

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{6m^2},\quad \varepsilon_3 = -\frac{1}{4m^2},\quad \varepsilon_4 = -\frac{1}{3m^2}+\frac{1}{30m^4}\quad \cdots$$

Au reste, la formule (34) représente simplement les premiers termes de la formule d'Euler

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)\,dx &= \frac{1}{m}\sum_1^{m-1}\varphi\left(\frac{h}{m}\right)+\frac{\varphi(1)+\varphi(0)}{2m} \\ &\quad -\frac{\varphi'(1)-\varphi'(0)}{12m^2}+\frac{\varphi'''(1)-\varphi'''(0)}{720m^4}-\frac{\varphi^{\mathrm{v}}(1)-\varphi^{\mathrm{v}}(0)}{30240m^6}+\ldots \end{aligned}$$

et les formules de Cotes sont complétées d'une manière analogue par d'autres formules qui se déduisent de cette dernière.

12. On conçoit que, dans des cas particuliers, le degré de précision de ces formules puisse être plus élevé que dans le cas général. Ainsi, quand $\varphi(x)$ est une fonction paire, $\varphi(x)=\psi(x^2)$, on aura, pour un nombre pair d'ordonnées symétriques ($n=2i$),

$$\int_0^1 \psi(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x^2)\,dx = A_1\psi(a_1^2)+A_2\psi(a_2^2)+\ldots+A_i\psi(a_i^2),$$

les racines et les coefficients étant calculés pour les limites ± 1. Le nombre des termes de la formule se trouve ainsi réduit de moitié, et la méthode de Gauss permet d'atteindre, avec i ordonnées, le degré $4i-1$; l'erreur ne commence qu'au terme x^{4i} du développement de $\varphi(x)$. En prenant $n = 2i+1$, on atteindrait le degré $4i+1$ avec $i+1$ ordonnées, car il faudrait alors ajouter le terme $\frac{1}{2}A_0\psi(0)$.

Soit, d'autre part, $\varphi(x) = x^{p-1}\psi(x^p)$. En posant $x^p = z$, on aura

$$p\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 \psi(z)dz = \Sigma A\psi(a),$$

et, en faisant usage de la méthode de Gauss, l'erreur ne commencera qu'au terme $z^{2n} = x^{2np}$. Dans le cas de $p = 2$ par exemple $[\varphi(x) = x\,\psi(x^2)$ étant une fonction impaire$]$, l'erreur ne commencera qu'au terme x^{4n}.

Dans une Thèse présentée en 1868 à la Faculté des Sciences, M. Pujet a traité le cas plus général où $\varphi(x) = x^q\psi(x^p)$. Posant encore $x^p = z$, on aura

$$p\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 \psi(z)\frac{x^{q+1}}{z}dz,$$

et l'intégrale appartient ici au type (2). On pourra la représenter par $\Sigma A\psi(a)$ avec le degré de précision $2n-1$ par rapport à z ($2np-1$ par rapport à x) en faisant

$$\frac{x^{q+1}}{z}F(z) = D_z^n[x^{q+1}z^{n-1}(z-1)^n]$$

et

$$A = \frac{1}{F'(a)}\int_0^1 F_a(z)\frac{x^{q+1}}{z}dz,$$

ainsi que cela résulte du raisonnement déjà employé aux n°s 4 et 7. Mais ce cas rentre dans le suivant, qui a été traité par M. Mehler (*Journal de Crelle*, t. 63, 1864).

13. La formule du type (2)

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) f(x) dx = \Sigma A \varphi(a)$$

atteindra le degré de précision $2n-1$ si l'on pose

(35) $$F(x) f(x) = D_x^n [f(x)(x^2-1)^n],$$

puisqu'on satisfait ainsi aux équations de condition

$$\int_{-1}^{+1} x^h F(x) f(x) dx = 0, \quad (h = 0, 1, \ldots, n-1),$$

qui sont les analogues des équations (12), pourvu que les produits $(1-x^2) f(x)$, $(1-x^2)^2 f'(x)$, ... s'annulent pour $x = \pm 1$. Cette condition sera remplie en prenant

$$f(x) = (1-x)^\lambda (1+x)^\mu,$$

tant que $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$. En même temps,

$$A = \frac{1}{F'(a)} \int_{-1}^{+1} F_a(x) f(x) dx.$$

On aura donc, avec le degré de précision $2n-1$,

(36) $$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)(1-x)^\lambda (1+x)^\mu dx = \sum A \varphi(a),$$

en prenant pour abscisses les racines de l'équation $F(x) = 0$, $F(x)$ étant définie par la relation

(37) $$(x-1)^\lambda (x+1)^\mu F(x) = D_x^n [(x-1)^{n+\lambda} (x+1)^{n+\mu}].$$

Pour prendre un exemple, soit $\lambda = \mu = 1$. Nous aurons

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)(1-x^2) dx = \sum A \varphi(a),$$

et (37) deviendra $F(x) = P'_{n+1} = 0$. Pour $n = 2$, on trouvera $a = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$, $A = \frac{2}{3}$.

Il est très remarquable que les coefficients de la formule de Gauss, ainsi généralisée, conservent la forme indiquée par la relation (28). Voici comment M. Mehler a démontré cette proposition.

La fonction F, définie par (37), satisfait à l'équation différentielle

$$(38) \quad \begin{cases} D_z[(1-z)^{\lambda+1}(1+z)^{\mu+1}F'(z)] \\ \quad + n(n+\lambda+\mu+1)(1-z)^{\lambda}(1+z)^{\mu}F(z) = 0. \end{cases}$$

Cette équation étant désignée par $\Phi(F) = 0$, la fonction $L(z)$, définie par la relation

$$(1-z)^{\lambda}(1+z)^{\mu}L(z) = R(z) = \int_{-1}^{+1}\frac{F(x)-F(z)}{x-z}(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu}dx,$$

satisfait à l'équation $\Phi(L) = 2c_0F'(z)$, où c_0 est une certaine constante numérique. On tire de là, en intégrant par rapport à z,

$$(1-z)^{\lambda+1}(1+z)^{\mu+1}(FL' - LF') = c_0F^2 - \text{const.},$$

et la constante se détermine en faisant $z = 1$. M. Mehler trouve

$$(39) \qquad \text{const.} = 2^{2n+\lambda+\mu+1}\frac{\Pi(n)\Pi(n+\lambda)\Pi(n+\mu)}{\Pi(n+\lambda+\mu)}.$$

En faisant $z = a$, on a $F = 0$; par suite,

$$(1-a^2)R(a)F'(a) = \text{const.},$$

d'où enfin

$$(40) \qquad A = \frac{R(a)}{F'(a)} = \frac{\text{const.}}{(1-a^2)F'^2(a)}.$$

14. On peut arriver au même résultat en suivant une marche analogue à celle qui nous a conduit à la formule (18). Supposons d'abord que $\lambda = 0$. Nous aurons

$$(41) \qquad (x+1)^{\mu}F(x) = D_x^n[(x^2-1)^n(x+1)^{\mu}].$$

En faisant, dans (36),

$$\varphi(x)(1+x)^{\mu} = D_x[(x+1)^{\mu+1} F_a^2(x)],$$

d'où

$$\varphi(x) = 2(x+1)F_a F'_a + (\mu+1)F_a^2,$$

l'intégration donne

$$2^{\mu}\frac{F^2(1)}{(1-a)^2} = A F'(a)[(a+1)F''(a) + (\mu+1)F'(a)] = A F'^2(a)\frac{1+a}{1-a},$$

en tenant compte de l'équation (38) et des relations déjà employées $F_a(a) = F'(a)$, $2F'_a(a) = F''(a)$. On aura donc

$$(42)\qquad A = \frac{2^{\mu}}{1-a^2}\,\frac{F^2(1)}{F'^2(a)}.$$

On peut d'ailleurs s'arranger de manière que $F(1)$ soit égale à 1; il suffit pour cela d'écrire, dans l'équation (41), $1.2\ldots n 2^n F(x)$ à la place de $F(x)$. On trouverait une expression analogue du coefficient A en faisant $\mu = 0$ au lieu de $\lambda = 0$.

Dans le cas général, où la formule (36) renferme les deux exposants λ, μ, je poserai

$$\varphi(x)(1-x)^{\lambda}(1+x)^{\mu} = F_a D_x[(1-x)^{\lambda+1}(1+x)^{\mu+1}F'_b] - F_b D_x[(1-x)^{\lambda+1}(1+x)^{\mu+1}F'_a].$$

L'intégration donne alors

$$\Big|_{-1}^{+1}(1-x)^{\lambda+1}(1+x)^{\mu+1}(F_a F'_b - F_b F'_a) = 0,$$

et la somme $\Sigma A\varphi(a)$ se réduit aux deux termes $A\varphi(a) + B\varphi(b)$. Or, en considérant que F_a, F_b et $D_x[(1-x)^{\lambda+1}(1+x)^{\mu+1}F']$ s'annulent pour $x = a$, on voit immédiatement qu'on aura

$$\varphi(a) = -2\frac{1-a^2}{(a-b)^2}F'^2(a),\quad \varphi(b) = 2\frac{1-b^2}{(b-a)^2}F'^2(b);$$

par conséquent,

$$A(1-a^2)F'^2(a) - B(1-b^2)F'^2(b) = 0.$$

Cette relation montre qu'on doit poser

$$(40)\qquad A = \frac{\text{const.}}{(1-a^2)F'^2(a)},$$

et il ne reste qu'à déterminer la constante qui figure au numérateur et dont l'expression a été donnée plus haut.

15. En faisant $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$ et $x = \cos\theta$, l'équation (37) devient

$$F(x) = \sqrt{x^2-1}\, D_x^n (x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = 1.3\ldots(2n-1)\cos n\theta$$

ou simplement

$$F(x) = \cos n\theta.$$

Soit encore $a = \cos\alpha$; on aura les racines de l'équation $F(a) = \cos n\alpha = 0$ en prenant

$$\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad (k = 0, 1, \ldots n-1);$$

puis, en faisant usage des notations du n° 6,

$$AF'(a) = \int_{-1}^{+1} F_a(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = E\int_{-1}^{+1}\frac{F(a)}{a-x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi E\frac{F(a)}{\sqrt{a^2-1}},$$

où il faut remplacer $\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ par son développement

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{1}{a^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{a^5} + \ldots.$$

On trouve facilement

$$E\frac{\cos n\alpha}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{n}F'(a),$$

d'où enfin

$$A = \frac{\pi}{n}.$$

On voit qu'ici les coefficients sont tous égaux, et que la formule de

quadrature

$$(43)\qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n}\sum\varphi(a)$$

ou bien

$$(44)\qquad \int_0^{\pi} \varphi(\cos\vartheta)\,d\vartheta = \frac{\pi}{n}\sum_0^{n-1}\varphi\left(\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\right),$$

dont le degré de précision est $2n-1$ comme celui de la formule de Gauss, représente une simple moyenne. M. Hermite en a donné une autre démonstration dans son *Cours d'Analyse*. On peut l'obtenir plus simplement comme il suit. Étant donnée la formule

$$\int_0^{\pi} \varphi(\cos\vartheta)\,d\vartheta = \sum \mathrm{A}\,\varphi(\cos\alpha),$$

si l'on considère que $\cos h\vartheta$ est une fonction entière de $\cos\vartheta$, du degré h, les équations de condition (3 *bis*) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(45)\qquad \sum\mathrm{A} = \pi,\quad \sum\mathrm{A}\cos h\alpha = \int_0^{\pi}\cos h\vartheta\,d\vartheta = 0,\quad (h=1,2,\ldots,2n-1).$$

On y satisfait en prenant $\mathrm{A}=\frac{\pi}{n}$ et $\alpha=\frac{2k+1}{2n}\pi\ (k=0,1,\ldots,n-1)$, car on a

$$(46)\qquad \sin\tfrac{1}{2}y\sum_0^{n-1}\cos(x+ky) = \sin\frac{n}{2}y\cos\left(x+\frac{n-1}{2}y\right).$$

Pour $\varphi=\cos 2n\vartheta$, la correction ε serait $\varepsilon_{2n}=\pi$. Pour $\varphi=\cos^n\vartheta$, elle serait $\frac{\pi}{2^{2n-1}}$.

16. En nous contentant d'atteindre le degré de précision $2n-1$ avec $n+1$ au lieu de n ordonnées, nous pourrons comprendre parmi les racines les limites 0 et π. Dans ce cas,

$$\mathrm{F}(x) = \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{D}_x^{n-1}(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = -\frac{1.3\ldots2n-1}{n}\sin\vartheta\sin n\vartheta,$$

ou simplement

$$F(x) = 2\sin\theta\sin n\theta = \cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta,$$

et les racines s'obtiennent en prenant

$$\alpha = \frac{k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Ensuite

$$A = \frac{\pi}{F'(a)} \operatorname{E} \frac{2\sin\alpha\sin n\alpha}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi\cos n\alpha\sin\alpha}{n\cos n\alpha\sin\alpha + \sin n\alpha\cos\alpha},$$

ou bien

$$A = \frac{\pi}{2n} \text{ pour } k = 0 \text{ et } k = n, \quad A = \frac{\pi}{n} \text{ pour } k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

On trouve ainsi

$$(47) \qquad \int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{n}\left[\frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2} + \sum_1^{n-1}\varphi\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right],$$

avec le degré de précision $2n-1$. Pour $\varphi = \cos 2n\theta$, la correction ε serait $\varepsilon_{2n} = -\pi$. Cette formule peut aussi se déduire directement des équations (45) et (46). La comparaison de (47) et de (44) donne

$$\sum\cos^{2h}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \sum\cos^{2h}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (h < n),$$

les sommes étant prises depuis $k = 0$ jusqu'à $k = n-1$.

17. Si, dans la formule (1), on écrit $x\varphi(x)$ à la place de $\varphi(x)$, elle devient, pour un nombre impair d'ordonnées symétriques ($n = 2i+1$),

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)x\,dx = \sum A_k a_k [\varphi(a_k) - \varphi(-a_k)],$$

où la somme s'étend depuis $k = 1$ jusqu'à $k = i$, le terme qui dépend de $a_0 = 0$ étant nul. En faisant usage de la méthode de Gauss, le degré de précision sera $4i+1$ par rapport à $x\varphi(x)$ ou bien $4i$ par rapport

à $\varphi(x)$. C'est comme si l'on obtenait le degré $4i = 2n$ avec $2i = n$ ordonnées, en faisant dans la formule primitive $A = A_k a_k$ et en donnant le signe — au coefficient de l'ordonnée conjuguée $\varphi(-a_k)$.

Le même raisonnement peut s'appliquer aux formules du type (2), et en particulier à la formule (44), qui devient alors

$$\int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi}{n}\sum \cos\alpha\,\{\varphi(\cos\alpha) - \varphi[\cos(\alpha+\pi)]\},$$

où il faut prendre $n = 2i + 1$, et pour α les i premières racines de l'équation $\frac{\cos n\theta}{\cos\theta} = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ $(k = 0, 1, \ldots, i-1)$, pour atteindre le degré $4i$ avec $2i$ ordonnées.

Dans le cas de $n = 3$, on aurait, avec le degré de précision 4,

$$\int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\theta\, d\theta = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right].$$

Les deux coefficients ont ici la même valeur numérique, comme dans la formule (44); pour un nombre plus grand d'ordonnées, les coefficients conjugués sont encore égaux et de signes contraires, mais ils n'ont plus tous la même valeur.

18. Lorsqu'on se propose de faire tous les coefficients égaux, il faut, en général, renoncer à atteindre le degré de précision $2n-1$. Nous savons déjà (n° **2**) que, dans le cas où l'on se donne les coefficients de la formule (1), on n'atteint en général que le degré n, ou tout au plus $n+1$ (si n est pair). S'il s'agit d'une formule du type (2), et que $f(x)$ soit une fonction impaire, par exemple $f(x) = x$, on posera

$$(48)\qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, x\, dx = A\sum [\varphi(a) - \varphi(-a)],$$

et les équations (3 *bis*) se réduiront aux suivantes,

$$(49)\qquad A\sum a^{2h+1} = \frac{1}{2h+3} \quad (h = 0, 1, \ldots i),$$

où les sommes s'étendent depuis a_1 jusqu'à a_i, le nombre des ordonnées étant $n = 2i$. Les équations (49) déterminent les inconnues A, a_1, a_2, ... a_i, et le degré de précision sera $n + 2$, puisque l'on a encore

$$A\Sigma(a^{n+2} - a^{n+2}) = 0.$$

En prenant $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, et posant toujours $x = \cos\theta$, $a = \cos\alpha$, la formule devient

$$(50) \qquad \int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\theta\, d\theta = A\sum\{\varphi(\cos\alpha) - \varphi[\cos(\alpha+\pi)]\},$$

et le système (49) est remplacé par le suivant :

$$(51) \qquad A\sum a^{2h+1} = \frac{1.3\ldots 2h+1}{2.4\ldots 2h+2}\,\frac{\pi}{2} \quad (h = 0, 1, \ldots, i).$$

19. Mais, avant de nous occuper de la résolution des équations (49) et (51), considérons la formule plus générale

$$\int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\lambda\theta\, d\theta = \sum A\,\varphi(\cos\alpha),$$

dont la formule ci-dessus n'est qu'un cas particulier. En posant

$$\varphi(\cos\theta) = \cos h\theta,$$

comme nous l'avons fait précédemment (nº **15**), les équations de condition deviennent

$$\sum A\cos h\alpha = \int_0^\pi \cos h\theta\cos\lambda\theta\, d\theta = 0 \quad (h \gtrless \lambda),$$
$$\sum A\cos\lambda\alpha = \frac{\pi}{2} \quad (h = \lambda).$$

Dans le cas de $\lambda = 0$, la dernière équation devient $\Sigma A = \pi$, et nous retrouvons la formule (44). Je supposerai donc ici que λ est un nombre entier, différent de zéro.

En prenant tous les A égaux, mais avec des signes alternants, nous aurons

$$(52)\qquad \begin{cases} \Sigma \pm \cos h\alpha = 0 \quad (h \lesseqgtr \lambda), \\ A \sum \pm \cos \lambda\alpha = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

On peut satisfaire à ces conditions en posant $n = 2i\lambda$, et

$$\alpha = \frac{\alpha_p + k\pi}{\lambda} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots 2\lambda - 1 \\ p = 1, 2, \ldots, i \end{pmatrix}.$$

En effet, quand h n'est pas un multiple de λ, on aura, en vertu de (46),

$$\sum_{k=0}^{k=\lambda-1} \cos h \frac{\alpha_p + 2k\pi}{\lambda} = \sum_{k=0}^{k=\lambda-1} \cos h \frac{\alpha_p + (2k+1)\pi}{\lambda} = 0,$$

quel que soit α_p; par conséquent $\Sigma \pm \cos h\alpha = 0$ pour chacune des racines α_p, puisque la somme des termes affectés du signe + s'évanouit aussi bien que celle des termes affectés du signe −. Si h est un multiple pair de λ, $\Sigma \pm \cos h\alpha$ s'annule parce que tous les termes ont la même valeur numérique. Reste le cas où h est un multiple impair de λ, $h = \lambda$, 3λ, 5λ, ... Dans ce cas, $\Sigma \pm \cos h\alpha$ devient $2\lambda \Sigma \cos \alpha_p$, $2\lambda \Sigma \cos 3\alpha_p$, ... et l'on a, pour déterminer les inconnues A, α_1, α_2, ..., α_i, le système d'équations

$$(53)\qquad \begin{cases} \Sigma \cos 3\alpha_p = \Sigma \cos 5\alpha_p = \ldots = \Sigma \cos(2i+1)\alpha_p = 0, \\ A \sum \cos \alpha_p = \frac{\pi}{4\lambda}. \end{cases}$$

Comme la dernière valeur de h pour laquelle $\Sigma \pm \cos h\alpha$ s'annule encore est $h = (2i+3)\lambda - 1$, le degré de précision de la formule sera $(2i+3)\lambda - 1 = n + 3\lambda - 1$. La formule elle-même peut s'écrire

$$(54)\qquad \int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\lambda\theta\, d\theta = A \sum_{p=1}^{p=i} \sum_{k=0}^{k=2\lambda-1} (-1)^k \varphi\left(\cos \frac{\alpha_p + k\pi}{\lambda}\right).$$

M. Tchebychef [1] est arrivé à la même formule par une autre mé-

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1873.

thode, sur laquelle nous reviendrons plus loin. On voit que les racines α_p sont indépendantes de λ et qu'elles ne dépendent que du nombre $2i$, qui est le nombre des ordonnées dans le cas le plus simple ($\lambda = 1$), où la formule coïncide avec (50).

Pour $i = 1$, on aura évidemment

$$\alpha = \frac{\pi}{6},$$

par suite

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad A = \frac{\pi}{6}\sqrt{3},$$

et la formule (50) deviendra

$$\int_0^\pi \varphi(\cos\theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi}{6}\sqrt{3}\left[\varphi\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\right] \text{ (degré de pr., 4).}$$

Pour $i = 2$ (quatre ordonnées ; degré de précision, 6), on aura les équations de condition

$$\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 = \cos 5\alpha_1 + \cos 5\alpha_2 = 0,$$

qui admettent les deux solutions

$\alpha_2 + \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$,	$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{5}$	$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$,	$\alpha_2 + \alpha_1 = \frac{3\pi}{5}$,
$\alpha_1 = \frac{1}{15}\pi$,	$\alpha_2 = \frac{4}{15}\pi$	$\alpha_1 = \frac{2}{15}\pi$,	$\alpha_2 = \frac{7}{15}\pi$.

Par conséquent,

$$\alpha_1 = 12^\circ, \quad \alpha_2 = 48^\circ,$$

ou bien

$$\alpha_1 = 24^\circ, \quad \alpha_2 = 84^\circ.$$

En même temps,

$$A = \frac{\pi}{8\cos 30^\circ . \cos 18^\circ} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\pi}{8\cos 30^\circ . \cos 54^\circ}.$$

Pour $i = 3$ (six ordonnées ; degré de précision, 8), on aura les équa-

tions

$$\Sigma \cos 3\alpha = \Sigma \cos 5\alpha = \Sigma \cos 7\alpha = 0$$

qui admettent les quatre solutions

α_1	11°.40′.13″,3	11°.59′.31″,1	19°.40′.19″,9	22°.4[illegible].29,0
α_2	26.56.11,6	41.55.40,4	65.26.17,5	46.49.15,3
α_3	56. 3.22,5	85.40.29,2	98.48.23,7	142. 9. 9,[illegible]
$\Sigma \cos\alpha =$	2,429218	1,797581	1,204209	0,81700[illegible]

20. Revenons à nos systèmes d'équations du n° 16. Si d'abord on fait $A = B = C = \ldots$ dans la formule (1), l'équation $\Sigma A = 2$ donne $A = \frac{2}{n}$, et la formule devient

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \frac{2}{n} \sum \varphi(a[illegible]$$

Les abscisses sont déterminées par le système d'équations

$$(55) \quad \sum a^2 = \frac{n}{6}, \quad \sum a^4 = \frac{n}{10}, \quad \ldots, \quad \sum a^{2i} = \frac{n}{4i+2} \quad (n = 2i \text{ ou } 2i+1)$$

où les sommes s'étendent depuis a_1 jusqu'à a_i; dans le cas de $n = 2i+1$, il faut ajouter la racine $a_0 = 0$. Soient maintenant $p_1, p_2, \ldots$ les coefficients de l'équation

$$F(x) = x^n - p_1 x^{n-2} + p_2 x^{n-4} - \ldots = 0.$$

En posant $\Sigma a^{2m} = s_m$, on aura les relations connues

$$p_1 = s_1, \quad 2p_2 = s_1^2 - s_2, \quad 2.3p_3 = s_1^3 - 3s_1 s_2 + s_3, \quad \ldots,$$

et l'élimination donnera

$$(56) \quad \begin{cases} x^n - \frac{n}{6} x^{n-2} + \left(\frac{n^2}{72} - \frac{n}{20}\right) x^{n-4} - \left(\frac{n^3}{1296} - \frac{n}{120} + \frac{n}{42}\right) x^{n-6} \\ \qquad + \left(\frac{n^4}{31104} - \frac{n^3}{1440} + \frac{263\,n^2}{50400} - \frac{n}{72}\right) x^{n-8} - [illegible] = 0. \end{cases}$$

On trouve ainsi, pour $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$,

$$x^2 - \frac{1}{3} = 0.$$

$$x^3 - \frac{1}{2}x = 0,$$

$$x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45} = 0,$$

$$x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{72}x = 0,$$

$$x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105} = 0,$$

$$x^7 - \frac{7}{6}x^5 + \frac{119}{360}x^3 - \frac{149}{6480}x = 0,$$

$$x^8 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{22}{45}x^4 - \frac{148}{2835}x^2 - \frac{43}{42525} = 0,$$

$$x^9 - \frac{3}{2}x^7 + \frac{27}{40}x^5 - \frac{57}{560}x^3 + \frac{53}{22400}x = 0.$$

Pour $n = 2$ (degré de précision, 3), on retombe sur la méthode de Gauss $\left(a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. Pour $n = 3$ (degré de précision, 3), nous avons $a_0 = 0$, $a_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, et la formule devient

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = \frac{2}{3}\left[\varphi(0) + \varphi\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \varphi\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Pour $n = 4$ et $n = 5$, le degré de précision est 5, et les racines sont, d'une part $\pm\sqrt{\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{5}}}$ et de l'autre 0 et $\pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{11}}{12}}$.

Voici les valeurs des racines, calculées avec six décimales, depuis $n = 2$ jusqu'à $n = 9$. Pour $n = 8$, elles sont en partie imaginaires. Les corrections ε ont été déterminées par la formule

$$\varepsilon_{n+m} = \int_{-1}^{+1} x^m\,\mathrm{F}(x)\,dx \quad (m = 2 \text{ pour } n = 2i, \quad m = 1 \text{ pour } n = 2i + 1).$$

	a		1 — a.	A.	α.	ε(± 1).	ε(0 et 1).
$n = 2$.	0,211325		0,788675	$\frac{1}{2}$	±0,577350	$\varepsilon_4 = \frac{8}{45} = 0,1778$	$\frac{1}{180} = 0,00555$
$n = 3$...	0,146447	0,5	0,853553	$\frac{1}{3}$	±0,707107 et 0	$\varepsilon_4 = \frac{1}{15} = 0,0667$	$\frac{1}{480} = 0,00208$
$n = 4$...	0,102673		0,897327	$\frac{1}{4}$	±0,794654	$\varepsilon_6 = \frac{32}{945} = 0,0339$	$\frac{1}{3780} = 0,00026$
	0,406204		0,593796		±0.187592		
$n = 5$...	0,083751		0,916249	$\frac{1}{5}$	±0,832498	$\varepsilon_6 = \frac{13}{756} = 0,0172$	$\frac{13}{96768} = 0,000134$
	0.312729	0,5	0,687271		±0,374541 et 0		
$n = 6$...	0,066877		0,933123	$\frac{1}{6}$	±0,866247	$\varepsilon_8 = \frac{16}{1575} = 0,01016$	$\frac{1}{50400} = 0,000020$
	0,288741		0.711259		±0,422519		
	0,366682		0,633318		±0,266635		
$n = 7$..	0.058069		0.941931	$\frac{1}{7}$	±0,883862	$\varepsilon_8 = \frac{281}{48600} = 0.00578$	$\frac{281}{24883200} = 0,000011$
	0,235172		0,764828		±0,529657		
	0,338044	0,5	0,661956		±0,323912 et 0		
$n = 8$...	0,049253		0,950747	$\frac{1}{8}$	±0,901494	$\varepsilon_{10} = \frac{1024}{280665} = 0,00365$	$\frac{1}{561330} = 0,0000018$
	$0.23971 \pm 0.02422\sqrt{-1}$				$\pm 0,52057 \pm 0,04844\sqrt{-1}$		
	$0,76029 \pm 0,02422\sqrt{-1}$				$\pm 0,12904 6\sqrt{-1}$		
	$0,5 \pm 0,064523\sqrt{-1}$						
$n = 9$...	0,044205		0,955795	$\frac{1}{9}$	±0,911589	$\varepsilon_{10} = \frac{163}{73920} = 0\ 00221$	$\frac{163}{151388160} = 0,0000011$
	0,199491		0,800509		±0,601019		
	0,235619		0,764381		±0,528762		
	0,416047	0,5	0,583953		±0,167906		

Supposons maintenant que la dernière racine a_i soit donnée d'avance; on aura $F(x) = (x^2 - a_i^2) F_1(x)$, et le degré de précision sera diminué de deux unités, car la dernière équation du système (55) ne sera plus satisfaite. Mais les coefficients de la nouvelle équation $F(x) = 0$ seront les mêmes que précédemment, sauf le dernier p_i, puisqu'ils sont déterminés par les mêmes relations linéaires; on trouvera donc $F_1(x)$ en cherchant le quotient $E\frac{F(x)}{x^2 - a_i^2}$, où $F(x)$ se déduit de (56).

En prenant $a_2 = 1$, on trouverait ainsi, pour $n = 4$,

$$F_1(x) = E\frac{x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{45}}{x^2 - 1} = x^2 + \frac{1}{3}:$$

la racine a_1 serait donc imaginaire. Mais, en prenant, par exemple,

$a_2 = \frac{2}{3}$, on trouverait

$$a_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}.$$

Comme le fait remarquer M. Tchebychef dans le Mémoire déjà cité, les formules de quadrature à coefficients égaux offriront un avantage marqué dans les cas où les ordonnées $\varphi(a)$ sont des données expérimentales affectées d'erreurs inconnues, car la somme des carrés des erreurs sera un minimum en prenant tous les coefficients égaux.

21. Considérons maintenant les formules du type (2) dans lesquelles $f(x)$ est une fonction impaire. Elles exigent la résolution des systèmes d'équations (49) ou (51). En désignant par s, s_3, s_5, ... les sommes des puissances impaires des racines a_1, a_2, ..., a_i, ces deux systèmes peuvent s'écrire

$$(57) \qquad \frac{1}{A} = 3s = 5s_3 = 7s_5 = \ldots = (n+3)\,s_{n+1}$$

et

$$(58) \qquad \frac{\pi}{4A} = \quad s = \frac{4}{3}s_3 = \frac{8}{5}s_5 = \ldots = \frac{4.6\ldots(n+2)}{3.5\ldots(n+1)}\,s_{n+1}.$$

Les quantités $a_1, \ldots, a_i$ seront les racines d'une équation du degré i,

$$x^i - p_1 x^{i-1} + p_2 x^{i-2} - \ldots = 0,$$

et nous allons voir que les coefficients de cette équation peuvent être exprimés en fonction des sommes s, s_3, s_5, ... En effet, soit

$$\Delta_m = \frac{1}{m}\left(s^m - s_m\right).$$

La formule bien connue

$$s_m - p_1 s_{m-1} + p_2 s_{m-2} - \ldots \pm m p_m = 0$$

conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
s &= p_1,\\
\Delta_3 &= p_1 p_2 - p_3,\\
\Delta_5 &= (p_1^2 - p_2)\Delta_3 + \quad p_1 p_4 - p_5,\\
\Delta_7 &= (p_1^2 - p_2)\Delta_5 + (p_1 p_3 - p_4)\Delta_3 + \quad p_1 p_6 - p_7,\\
-\frac{1}{3}\Delta_3^3 + \Delta_9 &= (p_1^2 - p_2)\Delta_7 + (p_1 p_3 - p_4)\Delta_5 + (p_1 p_5 - p_6)\Delta_3 + p_1 p_8 - p_9,
\end{aligned}$$

....

(Le terme $-\frac{1}{3}\Delta_3^3$ s'ajoute ici à Δ_9, parce que 9 n'est pas un nombre premier; il résulte, en effet, du théorème de Fermat qu'en posant $a_1 = a_2 = \ldots = 1$, d'où $s = s_3 = \ldots = i$, Δ_m ne peut être un nombre entier que si m est premier).

Comme on a encore, en vertu de (57),

$$3\Delta_3 = s\left(s^2 - \frac{3}{5}\right), \quad 5\Delta_5 = s\left(s^4 - \frac{3}{7}\right), \quad \ldots$$

on voit que les relations ci-dessus permettent d'exprimer les coefficients p_2, p_3, ... en fonction de s. L'élimination donne ensuite une équation qui détermine s, et à chaque valeur de s correspond un système de racines a_1, ..., a_i avec un coefficient A.

Pour $i = 1$ ($n = 2$), le système (57) devient

$$\frac{1}{A} = 3a = 5a^3,$$

d'où

$$a = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

et

$$\int \varphi(x)\,x\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}\left[\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) - \varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] \ldots \text{ (degr. de pr. 4).}$$

Pour $i = 2$ ($n = 4$), nous aurons d'abord

$$\Delta_3 = sp_2, \quad \Delta_5 = (s^2 - p_2)\Delta_3,$$

d'où

$$s\Delta_5 - s^3\Delta_3 + \Delta_3^2 = 0,$$

ou bien, en tenant compte des relations $3s = 5s_3 = 7s_5$,

$$s^4 - 3s^2 + \frac{72}{35} = 0,$$

puis

$$x^2 - sx + \frac{s^2}{3} - \frac{1}{5} = 0.$$

On tire de là ces deux systèmes de valeurs :

s	$=1,0299733$	$1,3925355$
a_1	$=0,8490469$	$0,8922365$
a_2	$=0,1809264$	$0,5002990$
A	$=0,3236330$	$0,2393715$

et la formule devient

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x)\,x\,dx = A[\varphi(a_1) - \varphi(-a_1) + \varphi(a_2) - \varphi(-a_2)] \quad \text{(degr. de pr. 6)}$$

Soit encore $n = 6$. Nous aurons

$$\Delta_3 = sp_2 - p_3, \quad \Delta_5 = (s^2 - p_2)\Delta_3, \quad \Delta_7 = (s^2 - p_2)\Delta_5 - sp_3\Delta$$

et, en éliminant p_2, p_3,

$$\Delta_3\Delta_7 - \Delta_5^2 + s^2\Delta_3\Delta_5 - s^4\Delta_3^2 + s\Delta_3^3 = 0,$$

d'où l'on tire, en tenant compte des relations $3s = 5s_3 = 7s_5 = 9s_7$,

$$\begin{cases} s^8 - 9s^6 + 27s^4 - \dfrac{159}{5}s^2 + \dfrac{72}{7} = 0, \\ x^3 - sx^2 - s^2x - s^3 - (x - s)\dfrac{\Delta_5}{\Delta_3} + \Delta_3 = 0. \end{cases}$$

En conservant seulement les racines réelles, on aura les deux systèmes

s	$=2,084445$	$0,711819$
a_1	$=0,929306$	$+0,862970$
a_2	$=0,712155$	$-0,763695$
a_3	$=0,442984$	$+0,612544$
A	$=0,159915$	$0,468284$

Pour $n = 8$, on trouve

$$\frac{\Delta_3\Delta_9 - \Delta_5\Delta_7 - \frac{1}{3}\Delta_3^4}{\Delta_3\Delta_7 - \Delta_5^2} = s^2 + \frac{s\Delta_7 - s^3\Delta_5 + \Delta_5\Delta_7}{s\Delta_5 - s^3\Delta_3 + \Delta_5^2},$$

et l'équation en s est du quatorzième degré.

Les constantes du système (58) se déterminent de la même manière, il n'y a de changé que les coefficients numériques des équations. Pour $n = 2$, on a

$$\frac{\pi}{4\mathrm{A}} = a = \frac{4}{3}a^3,$$

d'où

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \cos 30^\circ, \quad \mathrm{A} = \frac{\pi}{6}\sqrt{3},$$

comme plus haut (n° **19**). Pour $n = 4$, on trouve

$$\begin{cases} s^4 - \dfrac{15}{4}s^2 + \dfrac{45}{16} = 0, \\ x^2 - sx + \dfrac{1}{3}s^2 - \dfrac{1}{4} = 0, \end{cases}$$

d'où

$$s^2 = \frac{3}{8}(5 \pm \sqrt{5}), \quad \mathrm{A} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{5 \mp \sqrt{5}}{30}},$$

puis, en prenant le signe supérieur,

$$a = \sqrt{\frac{15 + 3\sqrt{5}}{32}} \pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{32}} = \cos 12^\circ \text{ et } \cos 48^\circ,$$

et, en prenant le signe inférieur,

$$a = \sqrt{\frac{15 - 3\sqrt{5}}{32}} \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{32}} = \cos 24^\circ \text{ et } \cos 84^\circ,$$

comme au n° **19**. Pour $n = 6$, on a

$$\begin{cases} s^8 - \dfrac{45}{4}s^6 + \dfrac{5.63}{8}s^4 - \dfrac{25.63}{32}s^2 + \dfrac{25.189}{256} = 0, \\ x^3 - sx^2 + s^2x - s^3 - (x - s)\dfrac{\Delta_5}{\Delta_3} + \Delta_3 = 0, \end{cases}$$

et ces équations admettent les quatre solutions déjà indiquées au n° **19**.

22. Voici, en peu de mots, la méthode par laquelle M. Tchebychef

détermine les racines a dans le cas des coefficients égaux. En faisant $A = B = C = \ldots = \frac{2}{n}$, l'équation (6) devient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{z - x} = \frac{2}{n} \sum \frac{1}{z - a} + \frac{\varepsilon_p}{z^{p+1}} + \ldots.$$

Multipliée par dz et intégrée, elle donne

$$\log z - \frac{1}{2.3.z^2} - \frac{1}{4.5.z^4} - \frac{1}{6.7.z^6} - \ldots = \frac{1}{n} \log F(z) - \frac{1}{2p} \frac{\varepsilon_p}{z^p} - \ldots;$$

par suite,

$$F(z) = z^n e^{-\frac{n}{2.3.z^2} - \frac{n}{4.5.z^4} - \ldots + \frac{\lambda}{z^p} + \ldots},$$

où $\lambda = \frac{n}{2p} \varepsilon_p$, et, puisque $F(z)$ est une fonction entière,

(59) $$F(z) = E z^n e^{-\frac{n}{2.3.z^2} - \frac{n}{4.5.z^4} - \ldots},$$

car les termes qui proviennent des corrections ε ne fourniraient que des puissances négatives, p étant au moins égal à $n + 1$ quand on fait $A = B = C = \ldots$. L'équation qu'on obtient en développant (59) coïncide avec notre équation (56).

S'il s'agit d'une formule du type (2), on aura d'abord

$$A = B = \ldots = \frac{1}{n} \int_{-1}^{+1} f(x) dx,$$

puis, en écrivant $f(x) dx$ à la place de dx dans l'équation (6) et en intégrant par rapport à z,

$$\int_{-1}^{+1} f(x) \log(z - x) dx = A \log F(z) - \frac{1}{p} \frac{\varepsilon_p}{z^p} - \ldots,$$

d'où enfin

(60) $$F(z) = E e^{\frac{1}{\lambda} \int_{-1}^{+1} f(x) \log(z - x) dx}.$$

En faisant $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on trouve

$$F(z) = E(z + \sqrt{z^2 - 1})^n = 2\cos(n \arccos z),$$

et l'on retombe sur la formule (44).

L'équation (60) cesse d'être applicable si $f(x)$ est une fonction impaire, puisqu'on trouverait alors $A = 0$. Nous savons déjà que, dans ce cas, on doit prendre un nombre pair d'ordonnées et donner à la moitié des coefficients le signe négatif.

En posant $F_1 = (z - a_1)\ldots(z - a_i)$, $F_2 = (z + a_1)\ldots(z + a_i)$ et $F(z) = F_1 F_2$, l'équation (6) donne ici

$$(61) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x) \log(z - x)\,dx = A \log \frac{F_1}{F_2} - \frac{1}{p}\frac{\varepsilon_p}{z^p} - \ldots,$$

où $p = n + 3$. Par suite,

$$(62) \qquad \frac{F_1}{F_2} = e^{\frac{1}{A}\int_{-1}^{+1} f(x)\log(z-x)\,dx},$$

en laissant de côté les termes qui proviennent des ε. La suppression de ces termes se justifie en remarquant que l'équation (62) peut s'écrire

$$\frac{C_1}{z} + \frac{C_3}{z^3} + \ldots = A \log \frac{1 + \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \ldots}{1 - \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} - \ldots} + \frac{1}{p}\frac{\varepsilon_p}{z^p} + \ldots,$$

où $C_m = \frac{1}{m}\int_{-1}^{+1} f(x) x^m\,dx$, et qu'en comparant les coefficients de $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^3}$, ..., $\frac{1}{z^{n+1}}$ à droite et à gauche, on obtient $i + 1$ relations qui déterminent les $i + 1$ inconnues $A, p_1, \ldots, p_i$, de sorte que les termes qui suivent $\frac{1}{z^{n+1}}$ peuvent être omis.

M. Tchebychef détermine les inconnues en développant le membre droit de l'équation (62) en fraction continue et en égalant à zéro le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le quotient complet de la réduite dont les termes

sont du degré i, comme F_1 et F_2. Dans le cas de $f(x) = x$, on a

$$C_m = \frac{2}{m(m+2)},$$

et il s'agit de développer en fraction continue l'expression

$$e^{-\frac{2}{A}\left(\frac{1}{3z}+\frac{1}{15z^3}+\frac{1}{35z^5}+\dots\right)}.$$

Pour $n = 2$, elle devient

$$1 - \frac{2}{3Az + 1 - \frac{1}{5Az}\left(3A^2 - \frac{5}{9}\right)} = \frac{3Az - 1}{3Az + 1}$$

en posant $3A^2 - \frac{5}{9} = 0$, d'où $A = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$; ensuite

$$F_1 = 3Az - 1, \quad F_2 = 3Az + 1.$$

Pour $n = 4$, on trouve de la même manière

$$5832A^4 - 945A^2 + 35 = 0, \quad 135A^2z^2 \pm 45Az - 27A^2 + 5 = 0,$$

et ces équations donnent pour le coefficient A et pour les abscisses a_1, a_2 les mêmes nombres que nous avons trouvés par la résolution du système (57).

Dans le cas de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, on trouverait, pour $n = 2$,

$$12\left(\frac{A}{\pi}\right)^2 - 1 = 0, \quad \frac{4A}{\pi}z \pm 1 = 0,$$

et, pour $n = 4$,

$$720\left(\frac{A}{\pi}\right)^4 - 60\left(\frac{A}{\pi}\right)^2 + 1 = 0, \quad 48\left(\frac{Az}{\pi}\right)^2 \pm 12\frac{Az}{\pi} - 12\left(\frac{A}{\pi}\right)^2 + 1 = 0,$$

et ces équations donnent les mêmes résultats que notre système (58).

25. Un moyen très simple de diminuer l'erreur de la formule (1) consiste à partager l'intégrale proposée en plusieurs autres, auxquelles on l'applique séparément. Comme nous l'avons vu, cette transforma-

tion ne change pas le degré de précision de la formule, mais la correction ε_p est réduite dans le rapport de 1 à $\frac{1}{\mu^p}$ si l'intervalle $1-0$ est partagé en μ parties égales. La formule devient alors

$$(63) \qquad \int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{1}{\mu}\sum_{i=0}^{i=\mu-1}\sum \mathrm{A}\varphi\left(\frac{i+a}{\mu}\right).$$

La règle de Simpson se déduit ainsi de la formule de Cotes à trois ordonnées, dont le degré de précision est 3. On a ici

$$a=0,\quad b=\frac{1}{2},\quad c=1,\quad \mathrm{A}=\mathrm{C}=\frac{1}{6},\quad \mathrm{B}=\frac{2}{3};$$

par suite, au moyen de $2\mu+1$ ordonnées équidistantes, en faisant $y_0=\varphi(0), y_h=\varphi\left(\frac{h}{2\mu}\right), y_{2\mu}=\varphi(1)$,

$$(64) \qquad \left\{\begin{aligned}\int_0^1 y\,dx = \frac{1}{6\mu}[\,&y_0+y_{2\mu}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2\mu-2})\\ &+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2\mu-1})],\end{aligned}\right.$$

et la correction ε_4 de la formule de Cotes $\left(\varepsilon_4=-\frac{1}{120}\right)$ se trouve ainsi réduite à $-\frac{1}{120\mu^4}$.

M. Y. Villarceau a proposé d'utiliser de la même manière la formule de Cotes à cinq ordonnées, dont le degré de précision est 5. On a ici les abscisses $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ et les coefficients $\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}$; par suite, au moyen de $4\mu+1$ ordonnées équidistantes,

$$(65) \qquad \left\{\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{1}{90\mu}[\,&7(y_0+y_{4\mu})+14(y_4+y_8+\ldots+y_{4\mu-4})\\ &+12(y_2+y_6+\ldots+y_{4\mu-2})\\ &+32(y_1+y_3+\ldots+y_{4\mu-1})]\end{aligned}\right.$$

et la correction $\varepsilon_6=-\frac{1}{2688}$ est réduite à $-\frac{1}{2688\mu^6}$.

Il serait facile de multiplier le nombre de ces formules mixtes, en renonçant aux ordonnées équidistantes. Remarquons, par exemple, qu'en prenant tous les coefficients égaux on obtient le degré de précision 5 avec quatre ordonnées dont les abscisses diffèrent très peu de 0,1, 0,4, 0,6, 0,9. Si l'on fait rigoureusement $x = \frac{1}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{9}{10}$, on n'atteint que le degré de précision 3 $\left(\text{avec } A = \frac{22}{90}, B = \frac{23}{90}\right)$; cependant la formule est encore *presque* exacte pour $\varphi(x) = x^4$. On a, en effet, en posant $\varphi\left(\frac{h}{10}\right) = y_h$,

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{4}(y_1 + y_4 + y_6 + y_9) + \frac{1}{180}(y_4 + y_6 - y_1 - y_9) - \frac{k_4}{15000} - \frac{k_5}{6000} - \ldots$$

Si maintenant on partage l'intervalle $1 - 0$ en deux parties égales, on trouve, en posant

$$\varphi\left(\frac{h}{20}\right) = y_h, \quad M_1 = \frac{1}{4}(y_4 + y_6 + y_{14} + y_{16}),$$

$$M_2 = \frac{1}{4}(y_1 + y_9 + y_{11} + y_{19}),$$

(66)
$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)\,dx &= \frac{1}{2}(M_1 + M_2) + \frac{1}{90}(M_1 - M_2) \\ &\quad - \frac{k_4}{240000} - \frac{k_5}{96000} - \ldots \end{aligned} \right.$$

En partant de la formule de Gauss pour $n = 2$, on aurait

(67)
$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2\mu} \sum_0^{\mu-1} \Bigg[&\varphi\left(\frac{2i + 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{2\mu}\right) \\ &+ \varphi\left(\frac{2i + 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{2\mu}\right)\Bigg] + \frac{k_4}{180\mu^4} + \ldots \end{aligned} \right.$$

Cette formule donne la valeur approchée de l'intégrale par une

simple moyenne; on peut l'écrire

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = \frac{1}{2\mu}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{2\mu}) + k_4\varepsilon_4 + \ldots .$$

Voici les valeurs des abscisses pour $\mu = 2$ et $\mu = 5$:

$$2\mu = 4 \left\{ \begin{array}{ll} 0,105662 & 0,394338 \\ 0,605662 & 0,894338 \end{array} \right. \qquad 2\mu = 10 \left\{ \begin{array}{ll} 0,0422650 & 0,1577350 \\ 0,2422650 & 0,3577350 \\ 0,4422650 & 0,5577350 \\ 0,6422650 & 0,7577350 \\ 0,8422650 & 0,9577350 \end{array} \right.$$

$$\varepsilon_4 = +\frac{1}{2880}, \qquad \varepsilon_4 = +\frac{1}{112500}.$$

24. Pour montrer par un exemple le degré d'approximation qu'on peut atteindre avec ces formules, appliquons-les à l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2 = 0,6931471805 6\ldots .$$

Voici les valeurs approchées de cette intégrale, calculées par les formules suivantes :

	Ordonnées.		Erreur de la 8e déc.	Degré de précision.
Cotes........	8	0,69314773.3	+ 55.3	7
»	9	0,69314721.5	+ 3.4	9
»	10	0,69314720.28	+ 2.22	9
»	11	0,69314718.20	+ 0.14	11
Simpson	9	0,69315453	+ 735	3 avec 4 divis.
Villarceau	9	0,69314790	+ 72	5 avec 2 divis.
»	13	0,69314725.3	+ 7.2	5 avec 3 divis.
Form. (66)...	8	0,69314755.1	+ 37.0	3 avec 2 divis.
Gauss.......	3	0,69312169.3	−2548.7	5
»	5	0,69314715.78	− 2.27	9
Form. (24bis)..	4	0,69318181.8	+3463.8	5
» ..	5	0,69314814.8	+ 96.8	7

	Ordonnées.		Erreur de la 8ᵉ déc.	Degré de précision.
Form. (24bis)...	6	0,69314720.81	+ 2.75	9
» ...	7	0,69314718.14	+ 0.08	11
» ...	7	0,69314809.9	− 91.8	5 avec 2 divis.
» ...	10	0,69314727.4	+ 9.3	5 avec 3 divis.
Tchebychef....	4	0,69312796.2	−1921.8	5
»	8	0,69314667.0	− 51.0	5 avec 2 divis.

Nous avons déjà vu (nº **10**) que l'erreur de la formule de Gauss et celle de la formule (24 *bis*) étaient à peu près du même ordre, mais de signes contraires, et que la moyenne $\frac{(n+1)G + nF}{2n+1}$ fournissait un résultat beaucoup plus approché. En effet, nous avons ici :

		Erreur.
G., 3 ordonnées........	0,69312169.3	−2548.7
G., 4 »	0,69318181.8	+3463.8
$\frac{4G+3F}{7}$..............	0,69314746.1	+ 28.1
G., 5 ordonnées........	0,69314715.785	− 2.271
F., 6 »	0,69314720.812	+ 2.756
$\frac{6G+5F}{11}$..............	0,69314718.070	+ 0.014

La formule de M. Tchebychef (à coefficients égaux), qui coïncide avec celle de Gauss pour $n = 1$ et $n = 2$, et la formule de Cotes (à ordonnées équidistantes), qui coïncide avec (24 *bis*) pour $n = 2$ et $n = 3$, sont dans un rapport analogue, mais moins bien caractérisé. Leurs corrections ε ont des signes contraires :

Tchebychef.		Cotes.	
$n = 2$....	$\varepsilon_4 = \frac{1}{180}$	$n = 3$....	$(\varepsilon_4) = -\frac{1}{120} = -\frac{3}{2}\varepsilon_4$
$n = 3$....	$\varepsilon_4 = \frac{1}{480}$	$n = 4$....	$(\varepsilon_4) = -\frac{1}{270} = -\frac{16}{9}\varepsilon_4$
$n = 4$....	$\varepsilon_6 = \frac{1}{3780}$	$n = 5$....	$(\varepsilon_6) = -\frac{1}{2688} = -1,41\,\varepsilon_6$
$n = 5$....	$\varepsilon_6 = \frac{13}{96768}$	$n = 6$....	$(\varepsilon_6) = -\frac{11}{52500} = -1,56\,\varepsilon_6$

On trouve ainsi :

		Erreur.
Tchéb., 4 ordonnées.....	0,69312796.2	— 1921.8
Cotes, 5 »	0,69317460.3	+ 2742.3
$\frac{7T+5C}{12}$	0,69314739.6	+ 21.6

Sur une grande inégalité du moyen mouvement de la planète Concordia;

PAR M. ABEL SOUCHON,
Membre adjoint du Bureau des Longitudes.

Il existe dans la théorie de la planète Concordia (58) troublée par Jupiter une inégalité fort remarquable, du cinquième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, et à laquelle la commensurabilité approchée des moyens mouvements n et n' de ces deux corps assigne une valeur sensible. On reconnaît, en effet, que l'excès de huit fois le moyen mouvement de Jupiter, moins trois fois celui de Concordia, est à fort peu près le $\frac{1}{52}$ de n', circonstance qui rend très petite la quantité $8n' - 3n$ ($2110''$ environ) et qui peut, par suite, rendre considérable l'inégalité du moyen mouvement dépendante de cet angle, à cause de la grandeur du coefficient $\frac{n^2}{(8n' - 3n)^2}$ qui affecte son expression.

Pour en déterminer les termes principaux, supposons que m se rapporte à Concordia, m' à Jupiter, et soient a, e, ω, φ, θ, ε, a', e', ω', φ', θ', ε' les autres éléments de leurs orbites elliptiques, ces quantités ayant une signification bien connue. Appelons γ l'inclinaison mutuelle des orbites, laquelle, à l'époque que nous adoptons, a pour valeur $4°34'11''$, et soit τ la longitude du nœud de l'orbite de m rapportée au plan de l'orbite de m'. Posons en outre

$$l = nt + \varepsilon, \quad l' = n't + \varepsilon'.$$

D'après la théorie des perturbations planétaires, on sait que les inégalités de l'espèce de celle que nous considérons sont au moins du cinquième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Nous aurons donc tout d'abord à développer jusqu'aux termes de cet ordre la fonction R qui exprime l'action réciproque des deux planètes. Or, en s'aidant pour cela des formules générales que l'on trouve au Livre VI de la *Théorie analytique du système du monde*, il n'est pas difficile de voir qu'on aura, dans le cas qui nous occupe :

$$\begin{aligned}
R = \;& M^{(0)} e^5 \cos(8l' - 3l - 5\omega) \\
&+ M^{(1)} e^4 e' \cos(8l' - 3l - 4\omega - \omega') \\
&+ M^{(2)} e^3 e'^2 \cos(8l' - 3l - 3\omega - 2\omega') \\
&+ M^{(3)} e^2 e'^3 \cos(8l' - 3l - 2\omega - 3\omega') \\
&+ M^{(4)} e e'^4 \cos(8l' - 3l - \omega - 4\omega') \\
&+ M^{(5)} e'^5 \cos(8l' - 3l - 5\omega') \\
&+ N^{(0)} e^3 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - 3\omega - 2\tau) \\
&+ N^{(1)} e^2 e'^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - 2\omega - \omega' - 2\tau) \\
&+ N^{(2)} e e'^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - \omega - 2\omega' - 2\tau) \\
&+ N^{(3)} e'^3 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - 3\omega' - 2\tau) \\
&+ N^{(4)} e \sin^4 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - \omega - 4\tau) \\
&+ N^{(5)} e' \sin^4 \frac{\gamma}{2} \cos(8l' - 3l - \omega' - 4\tau).
\end{aligned}$$

$M^{(0)}$, $M^{(1)}$, ... et $N^{(0)}$, $N^{(1)}$, ... sont des coefficients fonctions des éléments des orbites ; et, si après avoir posé

$$R = K \sin(8l' - 3l) + K' \cos(8l' - 3l)$$

on compare cette seconde forme de R avec la première, on en conclura, pour la variation $\delta\rho$ du moyen mouvement de Concordia ou pour la

valeur de l'intégrale double $-\int\int 3 a n d\mathrm{R}\, dt$,

$$\delta\rho = \frac{9 a m' n^2}{(8l' - 3l)^2}[\mathrm{K}' \sin(8l' - 3l) - \mathrm{K} \cos(8l' - 3l)],$$

expression dans laquelle on a

$$
\begin{aligned}
a' m' \mathrm{K}' = \frac{m'}{3840}\Big[& 129168\, b^{(8)}_{\frac{1}{2}} + 70065\,\alpha \frac{db^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 14220\,\alpha^2 \frac{d^2 b^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \\
& + 1350\,\alpha^3 \frac{d^3 b^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + 60\,\alpha^4 \frac{d^4 b^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} + \alpha^5 \frac{d^5 b^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\Big] e^5 \cos 5\omega \\
- \frac{m'}{768}\Big[& 145215\, b^{(7)}_{\frac{1}{2}} + 78993\,\alpha \frac{db^{(7)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 15858\,\alpha^2 \frac{d^2 b^{(7)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \\
& + 1470\,\alpha^3 \frac{d^3 b^{(7)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + 63\,\alpha^4 \frac{d^4 b^{(7)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} + \alpha^5 \frac{d^5 b^{(7)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\Big] e^4 e' \cos(4\omega + \omega') \\
+ \frac{m'}{384}\Big[& 162408\, b^{(6)}_{\frac{1}{2}} + 88848\,\alpha \frac{db^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 17754\,\alpha^2 \frac{d^2 b^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \\
& + 1597\,\alpha^3 \frac{d^3 b^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + 66\,\alpha^4 \frac{d^4 b^{(6)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} + \alpha^5 \frac{d^5 b^{(8)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\Big] e^3 e'^2 \cos(3\omega + 2\omega') \\
- \frac{m'}{384}\Big[& 180150\, b^{(5)}_{\frac{1}{2}} + 99594\,\alpha \frac{db^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 19607\,\alpha^2 \frac{d^2 b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \\
& + 1731\,\alpha^3 \frac{d^3 b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + 69\,\alpha^4 \frac{d^4 b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} + \alpha^5 \frac{d^5 b^{(5)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\Big] e^2 e'^3 \cos(\omega + 4\omega') \\
+ \frac{m'}{768}\Big[& 197184\, b^{(4)}_{\frac{1}{2}} + 111120\,\alpha \frac{db^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 21728\,\alpha^2 \frac{d^2 b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \\
& + 1872\,\alpha^3 \frac{d^3 b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + 72\,\alpha^4 \frac{d^4 b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} + \alpha^5 \frac{d^5 b^{(4)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\Big] e e'^4 \cos(\omega + 4\omega') \\
- \frac{m'}{3840}\Big[& 210968\, b^{(3)}_{\frac{1}{2}} + 123240\,\alpha \frac{db^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} + 24020\,\alpha^2 \frac{d^2 b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} \\
& + 2020\,\alpha^3 \frac{d^3 b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^3} + 75\,\alpha^4 \frac{d^4 b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^4} + \alpha^5 \frac{d^5 b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^5}\Big] e'^5 \cos 5\omega' \\
- \frac{m'\alpha}{96}\Big[& 1103\, b^{(7)}_{\frac{3}{2}} + 339\,\alpha \frac{db^{(7)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} + 33\,\alpha^2 \frac{d^2 b^{(7)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} + \alpha^3 \frac{d^3 b^{(7)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3}\Big] e^3 \sin^2\tfrac{1}{2}\gamma \cos(3\omega + 2\tau)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{m'\alpha}{32}\left[1488\,b_{\frac{3}{2}}^{(6)}+433\,\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha}+38\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^2}+\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(6)}}{d\alpha^3}\right]e^2e'\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(2\omega+\omega'+2\tau)$$

$$-\frac{m'\alpha}{32}\left[2088\,b_{\frac{3}{2}}^{(5)}+552\,\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha}+43\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^2}+\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(5)}}{d\alpha^3}\right]ee'\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(\omega+2\omega'+2\tau)$$

$$+\frac{m'\alpha}{96}\left[3008\,b_{\frac{3}{2}}^{(4)}+696\,\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha}+48\,\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2}+\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}\right]e'^3\sin^2\tfrac{1}{2}\gamma\cos(3\omega'+2\tau)$$

$$-\frac{3m'\alpha^2}{16}\left[10\,b_{\frac{5}{2}}^{(6)}+\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(6)}}{d\alpha}\right]e\sin^4\tfrac{1}{2}\gamma\cos(\omega+4\tau)$$

$$+\frac{3m'\alpha^2}{16}\left[17\,b_{\frac{5}{2}}^{(5)}+\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(5)}}{d\alpha}\right]e'\sin^4\tfrac{1}{2}\gamma\cos(\omega'+4\tau).$$

On aurait une expression semblable pour $a'm'K$, mais dans laquelle les cosinus seraient remplacés par des sinus.

Voici maintenant le Tableau des valeurs numériques des quantités $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$, $b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$, $b_{\frac{5}{2}}^{(i)}$ et de leurs dérivées, valeurs qui ont été obtenues en prenant $\alpha = 0,5190232$, ce qui suppose $a = 2,700374$, $a' = 5,202798$:

i.	$b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$.	$\alpha\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha}$.	$\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}$.	$\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^3}$.	$\alpha^4\frac{d^4b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^4}$.	$\alpha^5\frac{d^5b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{d\alpha^5}$.
0........	2,175248	0,382592	0,695927	1,418373	4,886528	21,30524
1........	0,582491	0,737137	0,603703	1,544781	4,838756	21,69372
2........	0,229762	0,527720	0,865194	1,508133	5,072619	21,85271
3...	0,100052	0,331498	0,850314	1,864913	5,215977	22,75349
4........	0,045626	0,197266	0,695052	2,048834	5,988863	23,56074
5........	0,021373	0,113928	0,512448	1,952738	6,759491	26,02948
6........	0,010189	0,064555	0,353596	1,671312	7,059161	28,59313
7........	0,004918	0,036097	0,233326	1,322485	6,645832	31,76985
8..... ..	0,002396	0,022238	0,148977	0,987079	5,834711	31,18750

i.	$b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$	$\alpha\frac{db_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha}$.	$\alpha^2\frac{d^2b_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}$.	$\alpha^3\frac{d^3b_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^3}$.	$b_{\frac{5}{2}}^{(i)}$	$\alpha\frac{db_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha}$.
0....	4,003632	6,428376	21,07848	87,87080	»	»
1....	2,815115	6,755295	20,36714	87,81594	»	»
2....	1,759069	5,832454	19,94401	85,41839	»	»
3....	1,044387	4,459008	18,29182	82,34706	»	»

i.	$b_{\frac{3}{2}}^{(i)}$.	$\alpha \frac{db_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha}$.	$\alpha^2 \frac{d^2 b_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^2}$.	$\alpha^3 \frac{d^3 b_{\frac{3}{2}}^{(i)}}{d\alpha^3}$.	$b_{\frac{5}{2}}^{(i)}$	$\alpha \frac{db_{\frac{5}{2}}^{(i)}}{d\alpha}$.
4....	0,602454	3,156870	15,46554	77,36035	»	»
5....	0,341120	2,121746	12,25274	68,71771	2,402061	17,87391
6....	0,190661	1,373584	9,16269	58,74700	1,513699	12,74584
7....	0,105545	0,864820	6,58974	46,82979	»	»

En adoptant, pour les éléments elliptiques des deux planètes à l'époque 7.0 janvier 1865, les valeurs suivantes :

Concordia.	$n = 292052'',59$	$\omega = 189°10'\ 5''$	$e = 0,0425625$	$\theta = 161°19'50''$	$\varphi = 5°\ 1'51''$
Jupiter...	$n' = 109256'',00$	$\omega' = 12°\ 9'28''$	$e' = 0,0482627$	$\theta' = 99°\ 5'23''$	$\varphi' = 1°18'37''$

on en déduit

$$\tau = 176°2'37'', \quad \gamma = 4°34'11''.$$

Par suite, on a, en prenant $m' = \frac{1}{1050}$ et effectuant la réduction en secondes,

$$\begin{aligned}
a'm'\mathrm{K}' = &+ \bar{5},6099052 \cos(5\omega) \\
&- \bar{5},9042964 \cos(4\omega + \omega') \\
&+ \bar{7},1895661 \cos(3\omega + 2\omega') \\
&- \bar{7},4819416 \cos(2\omega + 3\omega') \\
&+ \bar{7},4729955 \cos(\omega + 4\omega') \\
&- \bar{7},0643160 \cos(5\omega') \\
&- \bar{6},2278212 \cos(3\omega + 2\tau) \\
&+ \bar{7},0399799 \cos(2\omega + \omega' + 2\tau) \\
&- \bar{7},3798305 \cos(\omega + 2\omega' + 2\tau) \\
&+ \bar{7},2468543 \cos(3\omega' + 2\tau) \\
&- \bar{5},5658626 \cos(\omega + 4\tau) \\
&+ \bar{5},9438143 \cos(\omega' + 4\tau).
\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\log n = 5,4654617, \quad \log n^2 = 10,9309234,$$
$$\log(8n' - 3n) = 3,3242825, \quad \log(8n' - 3n)^2 = 6,6485650,$$

en sorte que

$$\log \frac{9\alpha n^2}{(8n' - 3n)^2} = 4,9517677;$$

et, si à ces nombres on associe ceux de $\log\cos 5\omega$, $\log\cos(4\omega + \omega')$, ..., $\log\cos(\omega' + 4\tau)$, $\log\sin 5\omega$, $\log\sin(4\omega + \omega')$... $\log\sin(\omega' + 4\tau)$, on obtient enfin pour la valeur numérique de l'inégalité $\delta\rho$ de Concordia, mise sous la forme d'un seul terme,

$$\delta\rho = 444'',4 \sin(8l' - 3l + 89°8'31'').$$

Le rapport $\frac{2\pi}{(8n' - 3n)}$ assigne à cette inégalité une période dont la durée est de 224970 jours moyens ou 615,96 années juliennes.

Théorie générale des polygones étoilés;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

INTRODUCTION.

Les polygones réguliers étoilés trouvent leur emploi dans les arts professionnels, dans les arts décoratifs et quelquefois en Architecture.

L'existence de ces figures constellées n'était pas ignorée des anciens. Pythagore avait connaissance du pentagone étoilé, qui, sous le nom d'ὑγιθά, était regardé par ses disciples comme l'emblème du salut et de la santé (*sanitatem Pythagoræ*) (1).

L'étoile pentagonale des Grecs reparaît dans la *Géométrie* de Boèce, est citée dans les *Commentaires* de Campanus sur Euclide, et se trouve étudiée dans les écrits de Lucas di Borgo (2), Peletier du Mans (3), Clavius (4) et Ramus. Tous ces auteurs reconnaissent, avec Campanus, que, dans le pentagone étoilé, la somme des cinq angles est égale à deux angles droits, comme cela se présente pour le triangle.

Bradwardin (5) fut le premier qui eût étendu la théorie du pentalpha

---

(1) *Encyclopedia universa Alstedii*, Herbonæ, liber XV, 1620: in-4°.

(2) *Euclidis opera a Campano interprete fidissimo translata, Lucas Paciolus emendavit.* Venetiis, 1509; in-fol.

(3) *Demonstratio in Euclidis elementa Geometriæ, libri sex.* Lyon, 1557; in-8°.

(4) *Euclidis elementorum libri XVI.* Romæ, 1574; in-8°.

(5) *Geometria speculativa Thome Bradwardini*, etc. Parisiis, 1496; in-fol.

aux polygones rayonnés d'un plus grand nombre de côtés, qu'il appelle *polygones égrédients* (*egredi*, se porter en dehors).

Cette théorie n'a été réellement constituée qu'entre les mains de Képler ([1]), qui vint y ajouter la célébrité de son nom, en l'asseyant sur des considérations analytiques. Dans l'inscription des polygones réguliers, convexes et étoilés, le grand astronome détermine par l'analyse le rapport des côtés au diamètre du cercle circonscrit et en déduit une construction géométrique pour chacun d'eux; il calcule en même temps la valeur des angles des divers polygones réguliers étoilés qu'il considère.

Après Képler, la science des polygones étoilés retombe dans l'oubli. Ce n'est qu'en 1809 que l'illustre Poinsot ([2]) la ressuscite, lui donne un corps complet et l'érige en doctrine définitive.

Dans son remarquable Mémoire, le savant académicien considère les polygones sous le rapport de la situation relative de leurs sommets et détermine, d'une manière générale, la somme de leurs angles. Il démontre qu'il existe autant de polygones de n côtés et à périmètre continu qu'il y a de nombres premiers avec n depuis 1 jusqu'à $\frac{n-1}{2}$ ([3]), et il essaye de prouver en même temps que, dans les polygones de n côtés et de l'espèce p, la somme des angles est égale à $2(n-2p)$ angles droits ([4]). Ce n'est que par un raisonnement intuitif et pour ainsi dire expérimental que Poinsot établit ce théorème et le généralise en l'étendant aux polygones irréguliers.

Nous nous proposons, dans cette rédaction : 1° de chercher le nombre des polygones étoilés à périmètre continu de n côtés et d'en déduire le nombre des polygones étoilés de $2n$ côtés; 2° de déterminer d'une manière générale, facile mais rigoureuse, la somme des angles d'un polygone étoilé quelconque; 3° d'établir quelques théorèmes utiles sur les polygones étoilés qui sont réguliers; 4° de calculer les côtés des principaux de ces polygones; enfin, 5° de donner la formule

---

([1]) *Harmonices mundi libri V*. Lincii Austriæ, 1619; in-fol.

([2]) *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1810, t. V, cahier X, p. 16 à 48.

([3]) *Loc. cit.*, p. 21.

([4]) *Loc. cit.*, p. 22.

qui fournit la surface d'un polygone régulier étoilé à périmètre continu ou à périmètre composé, de tirer de cette formule les conséquences les plus importantes et d'en présenter des applications.

Nous avons lieu de penser que cette exposition résume la théorie complète des polygones étoilés, dont on ne s'est guère occupé depuis les travaux de Poinsot. Le professeur A. Amiot [1] et MM. Rouché et de Comberousse [2] sont les seuls auteurs français qui aient exposé les idées de Poinsot, sans toutefois les développer. Celles-ci n'ont pas eu plus d'écho à l'étranger.

§ I. — Nombre des polygones étoilés de n cotés et de $2n$ côtés.

1. Théorème I. — *Étant donnée une courbe convexe et fermée, divisée en n parties consécutives, lorsqu'on joint les points de division, à partir de l'un d'eux, dans le même sens de p en p par des droites, on forme un polygone à périmètre continu de n côtés, si les nombres n et p sont premiers entre eux, et l'on n'en forme qu'un.*

Ce principe élémentaire est d'une démonstration facile.

2. *Définition I.* — Le polygone obtenu est dit *étoilé* et de *l'espèce p*. Les polygones *convexes* sont de la *première* espèce.

3. *Remarque I.* — Il est évident que le périmètre de notre polygone étoilé sous-tend np divisions consécutives de la courbe ou p fois la courbe elle-même.

4. *Remarque II.* — Si l'on parcourt, dans le même sens, la suite des côtés d'un polygone étoilé, on trouvera un même nombre a de sommets à droite de chaque côté du polygone et aussi un même nombre b de sommets à gauche de chaque côté, et, si n désigne le

---

[1] *Leçons nouvelles de Géométrie*, 2e édition, 1865; Ire Partie, p. 267 et suiv.

[2] *Traité de Géométrie*, 4e édition, 1879; Ire Partie, p. 168 et suiv.

nombre des côtés du polygone et p son espèce, on aura

$$n = 2 + a + b;$$

$p = a + 1$ ou $p = b + 1$.

Nous prendrons toujours, pour désigner l'espèce de notre polygone, le plus petit des nombres $a + 1$, $b + 1$.

Ainsi le polygone étoilé de n côtés et de l'espèce p a $p - 1$ sommets d'une part de chacun de ses côtés et $n - p - 1$ de l'autre part.

On en conclut que :

Si, dans notre courbe, nous joignons les points de division d'abord de p en p, puis de $n - p$ en $n - p$, nous obtiendrons deux polygones étoilés de même espèce.

5. *Remarque III.* — Si les nombres n et p, au lieu d'être premiers entre eux, avaient un facteur commun d [1], le polygone formé par la jonction des points de division de p en p n'aurait que $\frac{n}{d}$ côtés et son périmètre sous-tendrait $\frac{p}{d}$ fois la courbe.

6. *Définition II.* — Dans ce cas, si l'on joint les points de division de p en p, successivement à partir des points 1, 2, 3, ..., d, on formera d polygones étoilés de $\frac{n}{d}$ côtés et de l'espèce $\frac{p}{d}$.

On peut encore admettre que l'ensemble de ces d polygones constitue un polygone de n côtés et de l'espèce p; mais alors les côtés ne forment plus une ligne brisée continue. Nous dirons donc que le polygone résultant est *à périmètre composé,* mais non étoilé proprement dit.

Ainsi l'hexagone de deuxième espèce se compose de deux triangles, superposés sans coïncider, et placés en sens inverses.

7. Théorème II. — *Il existe autant d'espèces de polygones de n côtés qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre qui exprime combien il y a de nombres entiers inférieurs à n et premiers avec n.*

---

[1] Le nombre d est supposé le plus grand commun diviseur entre n et p.

En effet, si p est premier avec n, $n-p$ le sera aussi, et, comme les deux polygones étoilés de n côtés qui correspondent aux nombres p et $n-p$ sont de même espèce (n° 4), le principe se trouve démontré [1].

L'un de ces polygones est toujours convexe ; les autres sont étoilés.

Ainsi il y a deux espèces de pentagones, trois heptagones, deux octogones, deux ennéagones, cinq endécagones, deux dodécagones, quatre pentédécagones, etc.

Si n est un nombre premier absolu, il existera $\frac{n-1}{2}$ espèces de polygones de n côtés à périmètre continu, car tous les nombres entiers, inférieurs à n, seront premiers avec n.

L'espèce la plus élevée des polygones de n côtés est $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n-2}{2}$, suivant que n est un nombre impair ou un nombre pair.

8. Théorème III. — *Lorsque n est un nombre impair, il existe autant d'espèces de polygones de $2n$ côtés à périmètre continu, qu'il y a d'espèces de polygones de n côtés à périmètre continu.*

Soit p un nombre entier inférieur à la moitié de n et premier avec n. Il existera un polygone à périmètre continu de n côtés et de l'espèce p.

Puisque p est inférieur à la moitié de n, $2p$ sera moindre que n ; par suite, $n-2p$ sera un nombre entier positif et plus petit que n ou que la moitié de $2n$.

Or je dis que $n-2p$ est premier avec $2n$.

En effet, n étant impair, $n-2p$ sera aussi impair. Il s'ensuit que tout facteur entier commun à $n-2p$ et $2n$ ne saurait être qu'un nombre impair, qui, par suite, diviserait n. Ce facteur, divisant $n-2p$ et n, diviserait leur différence $2p$ et par conséquent p. Donc p et n ne seraient pas premiers entre eux.

Ainsi, à chaque nombre entier p inférieur à la moitié de n et premier avec n correspond un nombre entier $n-2p$ inférieur à la moitié de $2n$ et premier avec $2n$.

Réciproquement, à chaque nombre entier q inférieur à la moitié n

[1] Poinsot, *Journal de l'École Polytechnique*, 1810, t. V, cahier X, p. 21.

de $2n$ et premier avec $2n$ correspond un nombre entier $\frac{n-q}{2}$ inférieur à la moitié de n et premier avec n.

Car q, étant premier avec $2n$, est un nombre impair; comme n est supposé impair, $\frac{n-q}{2}$ est un nombre entier évidemment moindre que la moitié de n.

D'ailleurs q, étant premier avec $2n$, l'est avec n; donc $\frac{n-q}{2}$ est aussi premier avec n.

Il s'ensuit que, si n est un nombre impair, à toute espèce de polygone de n côtés correspond une espèce de polygone de $2n$ côtés, et réciproquement.

9. *Définition III.* — Nous appellerons *polygones correspondants* deux polygones à périmètre continu, l'un d'un nombre impair n de côtés et l'autre d'un nombre double $2n$ de côtés, dont les espèces sont respectivement p et $n-2p$.

Il s'ensuit que :

Lorsque n est un nombre impair, deux polygones à périmètre continu, l'un de n et l'autre de $2n$ côtés, sont correspondants, si la double espèce du premier, augmentée de l'espèce du second, donne une somme egale à n.

10. Théorème IV. — *Lorsque n est un nombre pair, il existe deux fois autant de polygones à périmètre continu de $2n$ côtés, qu'il y a de polygones à périmètre continu de n côtés.*

Soit, en effet, p un nombre entier inférieur à la moitié de n et premier avec n. Il existera un polygone à périmètre continu de n côtés et de l'espèce p.

Or le nombre p, étant premier avec le nombre pair n, est nécessairement impair; par suite, il est aussi premier avec $2n$.

Mais, p étant premier avec n, $n-p$ l'est aussi, non seulement avec n, mais encore avec $2n$; de plus, $n-p$ est évidemment moindre que n ou que la moitié de $2n$.

Donc, si n est pair, à chaque polygone à périmètre continu de $2n$ côtés et de l'espèce p correspondent deux polygones à périmètre continu de $2n$ côtés et des espèces respectives p et $n-p$.

La réciproque est évidente.

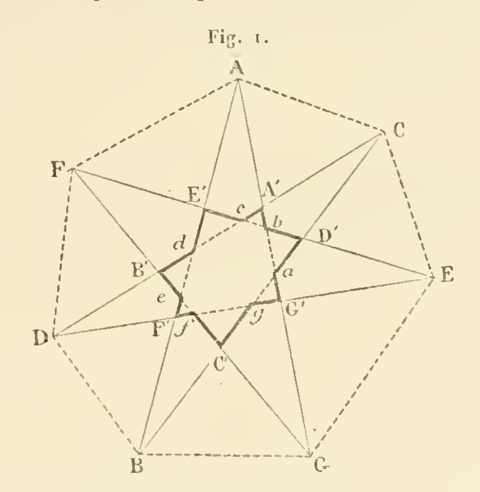
Il s'ensuit que le nombre des polygones à périmètre continu de $2n$ côtés est double du nombre des polygones à périmètre continu de n côtés.

11. *Définition IV.* — Nous appellerons *polygones conjugués* deux polygones à périmètre continu, d'un nombre doublement pair $2n$ de côtés, dont la somme des espèces est égale à n.

§ II. — Évaluation de la somme des angles dans les polygones quelconques, a périmètre continu ou a périmètre composé.

12. *Définition I.* — Considérons le polygone étoilé ABCDEFG (*fig.* 1), que nous supposerons quelconque. Nous donnerons le nom d'*angle*

Fig. 1.



saillant à tout angle, tel que GAB, qui est compris entre deux côtés consécutifs GA et AB.

13. *Définition II.* — Les côtés GA et AB d'un angle saillant sont généralement rencontrés par tous les autres côtés du polygone. Les points d'intersection A' et E', les plus rapprochés du sommet A, sont les sommets de deux angles AA'C et AE'F, qui s'appuient respectivement sur les deux côtés de l'angle GAB.

Ces deux angles AA'C et AE'F peuvent être appelés des *angles rentrants* du polygone ABCDEFG.

14. *Remarque*. — Dans ce paragraphe, nous ne ferons aucune distinction entre les polygones ; ils peuvent être à périmètre continu ou à périmètre composé. Nous considérerons même la suite non interrompue de toutes les espèces des polygones de n côtés, qui naturellement sont au nombre de $\frac{n-1}{2}$ ou de $\frac{n-2}{2}$, suivant que n est impair ou pair.

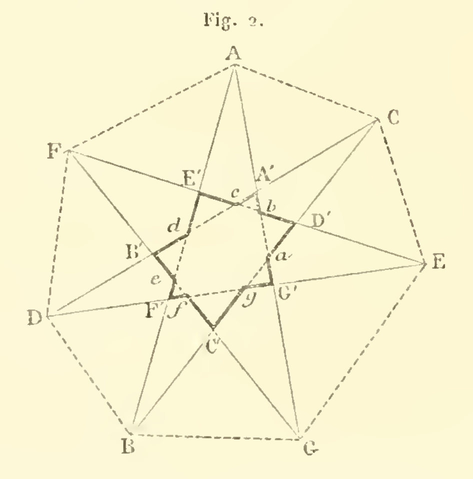
L'inspection de la *fig.* 1 fait voir que les angles rentrants du polygone ABCDEFG sont opposés par le sommet aux angles saillants du polygone A'B'C'D'E'F'G', dont les côtés ont les mêmes directions que ceux du premier, mais dont l'espèce est inférieure d'une unité à celle de ce polygone.

15. Théorème I. — *La différence entre les sommes des angles saillants de deux polygones quelconques, ayant le même nombre de côtés, mais étant de deux espèces consécutives, est constante et égale à quatre angles droits.*

Désignons, en général, par $\Sigma_{c,e}$ la somme des angles saillants dans un polygone de c côtés et de l'espèce e.

Considérons les deux polygones A'B'C'... et ABC... (*fig.* 2),

Fig. 2.



ayant n côtés, et se trouvant le premier de l'espèce $p-1$ et le second de l'espèce immédiatement supérieure p.

Tirons les droites AF, FD, DB... ; nous formons un polygone convexe de n côtés AFDB.... Sur les n côtés de ce polygone s'appuient les n triangles AFE′, FDB′, DBF′, ..., dont les angles au sommet E′, B′, F′, ... sont égaux aux angles saillants du polygone A′B′C′D′... de l'espèce $p - 1$ (n° 14). Nous avons donc

$$\Sigma_{n,p-1} + E'AF + E'FA + B'FD + B'DF + \ldots = 2n \text{ angles droits},$$

d'où nous tirons

$$\Sigma_{n,p-1} = n\pi - (E'AF + E'FA + B'FD + B'DF + \ldots),$$

en désignant par π la mesure de deux angles droits. Or la somme des angles entre parenthèses égale la somme des angles du polygone convexe AFDB..., moins la somme $\Sigma_{n,p}$ des angles saillants du polygone étoilé ABCD... de l'espèce p. Puisque la somme des angles d'un polygone convexe de n côtés est égale à $n - 2$ fois deux angles droits ou égale à $(n - 2)\pi = n\pi - 2\pi$, nous aurons

$$\Sigma_{n,p-1} = n\pi - (n\pi - 2\pi - \Sigma_{n,p}),$$

ou

$$\Sigma_{n,p-1} = 2\pi + \Sigma_{n,p}.$$

Nous en tirons l'égalité

$$\text{(I)} \qquad \Sigma_{n,p-1} - \Sigma_{n,p} = 2\pi,$$

qu'il fallait établir.

16. Corollaire. — *Dans tout polygone étoilé, la différence entre la somme des angles rentrants et celle des angles saillants est constante et égale à quatre angles droits.*

17. *Remarque.* — Dans cette démonstration, nous n'avons fait aucune restriction sur la nature de nos deux polygones étoilés, qui peuvent être, l'un ou tous les deux, à périmètre continu ou à périmètre composé.

18. Théorème II. — *Dans tout polygone étoilé de n côtés et de l'es-*

pèce p, la somme des angles (saillants) *est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a d'unités dans le nombre n des côtés, diminué du double nombre 2p de l'espèce* [1], c'est-à-dire que

$$\text{(II)} \qquad \Sigma_{n,p} = (n - 2p)\pi.$$

En effet, la relation (I) nous donne

$$\Sigma_{n,p} = \Sigma_{n,p-1} - 2\pi.$$

Si nous attribuons à p successivement les valeurs

$$1, 2, 3, \ldots, p-1, p,$$

et que nous ayons égard à l'expression $\Sigma_{n,1} = (n-2)\pi$, nous aurons la suite des égalités

$$\begin{aligned}
\Sigma_{n,1} &= n\pi - 2\pi,\\
\Sigma_{n,2} &= \Sigma_{n,1} - 2\pi,\\
\Sigma_{n,3} &= \Sigma_{n,2} - 2\pi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Sigma_{n,p-1} &= \Sigma_{n,p-2} - 2\pi,\\
\Sigma_{n,p} &= \Sigma_{n,p-1} - 2\pi.
\end{aligned}$$

Ajoutons ces p équations membre à membre et supprimons les sommes $\Sigma_{n,1}, \Sigma_{n,2}, \ldots, \Sigma_{n,p-1}$, qui seront communes aux deux membres de l'équation résultante ; nous obtenons l'égalité

$$\Sigma_{n,p} = n\pi - 2\pi p$$

ou

$$\Sigma_{n,p} = (n - 2p)\pi,$$

qu'il fallait établir.

19. Corollaire I. — Si n est pair, l'espèce la plus élevée sera marquée par le nombre $\frac{n-2}{2}$ (n° **7**) ; par suite, on aura

$$\text{(III)} \qquad \Sigma_{n,\frac{1}{2}(n-2)} = [n - (n-2)]\pi = 2\pi.$$

[1] Poinsot, *Journal de l'École Polytechnique*, 1810, t. V, cahier X, p. 22.

Si n est impair, l'espèce la plus élevée sera marquée par le nombre $\frac{n-1}{2}$ (n° 7); par suite, il viendra

(IV) $$\Sigma_{n,\frac{1}{2}(n-1)} = [n-(n-1)]\pi = \pi$$

On en conclut que :

La somme des angles d'un polygone étoilé de l'espèce la plus élevée, parmi ceux d'un même nombre de côtés, est égale à quatre *angles droits, ou égale à* deux *angles droits, suivant que le nombre des côtés du polygone étoilé est* pair *ou* impair.

Ainsi, la somme des angles du triangle, celle des angles du pentagone de deuxième espèce, ou de l'heptagone de troisième espèce, de l'ennéagone de quatrième espèce, du pentédécagone de septième espèce, etc., est la même et toujours égale à *deux* angles droits.

De même la somme des angles de l'octogone de troisième espèce, du décagone de quatrième espèce, du dodécagone de cinquième espèce, etc., est aussi la même et égale à *quatre* angles droits.

20. Corollaire II. — Lorsqu'un polygone a un nombre de côtés *simplement pair* $2n$, et que p est moindre que n et premier avec n, nous avons

$$\Sigma_{2n,n-2p} = [2n-2(n-2p)]\pi = 4p\pi.$$

Donc *la somme des angles du polygone étoilé de* $2n$ *côtés et de l'espèce* $n-2p$ *est indépendante du nombre des côtés et ne dépend que de l'espèce* p *du polygone. Cette somme est égale à* $2p$ *fois quatre angles droits.*

Puisqu'on a

$$\Sigma_{n,p} = (n-2p)\pi = n\pi - 2p\pi,$$

il vient

(V) $$2\Sigma_{n,p} + \Sigma_{2n,n-2p} = 2n\pi.$$

Ainsi, *lorsque* n *est impair, les angles de deux polygones correspondants, dont l'un a* n *côtés, sont tels, que la double somme des angles*

du premier polygone, augmentée de la somme des angles du second, est indépendante des espèces de ces deux polygones et ne dépend que du nombre de leurs côtés. Cette somme est égale à n fois quatre angles droits.

21. Corollaire III. — Lorsqu'un polygone a un nombre de côtés *doublement pair* $2n$ et que p est inférieur à la moitié de n et premier avec n, on a

$$\Sigma_{2n,n-p} = [2n - 2(n-p)]\pi = 2p\pi.$$

Donc, *la somme des angles du polygone étoilé de $2n$ côtés et de l'espèce $n-p$ est indépendante du nombre des côtés et ne dépend que de l'espèce du polygone. Cette somme est égale à p fois quatre angles droits.*

Puisque l'on a

$$\Sigma_{2n,p} = (2n - 2p)\pi = 2n\pi - 2p\pi,$$

il vient

$$\text{(VI)} \qquad \Sigma_{2n,p} + \Sigma_{2n,n-p} = 2n\pi.$$

Ainsi, *lorsque n est pair, la somme des angles de deux polygones conjugués est indépendante de leurs espèces et ne dépend que du nombre $2n$ de leurs côtés. Cette somme est égale à n fois quatre angles droits.*

22. Théorème III. — *Dans tout polygone, la somme des angles extérieurs, que l'on obtient en prolongeant tous les côtés dans le même sens, est égale à autant de fois quatre angles droits qu'il y a d'unités dans l'espèce du polygone.*

En effet, la somme des angles, tant extérieurs que saillants, est égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de sommets ou de côtés. Si le polygone a n côtés, cette somme sera $n\pi$.

Mais, si le polygone est de l'espèce p, la somme des angles saillants sera

$$\Sigma_{n,p} = (n - 2p)\pi.$$

Nous avons, par suite, pour la somme E des angles extérieurs,

$$E = n\pi - \Sigma_{n,p} = n\pi - (n - 2p)\pi = n\pi - n\pi + 2p\pi$$

Donc il vient

$$\text{(VII)} \qquad E = p\,2\pi.$$

Ainsi, dans le pentagone de seconde espèce, la somme des angles extérieurs est égale à huit angles droits.

§ III. — Les polygones réguliers étoilés.

23. Théorème I. — *Dans tout polygone régulier étoilé de n côtés et de l'espèce p,*

1° *Chaque angle saillant est égal à l'excès de deux angles droits sur $\frac{4p}{n}$ d'angle droit;*

2° *Chaque angle rentrant est égal à l'excès de deux angles droits sur $\frac{4(p-1)}{n}$ d'angle droit.*

1° Car, les n angles saillants étant égaux entre eux et valant ensemble $(n-2p)\pi$, chacun d'eux vaudra la $n^{\text{ième}}$ partie de cette somme, ou $\frac{(n-2p)\pi}{n}$. En désignant l'un quelconque de ces angles par α, on a donc

$$\text{(I)} \qquad \alpha = \pi - \frac{2p\pi}{n} = 2 \text{ droits} - \frac{4p}{n} \text{ d'angle droit.}$$

2° De même les n angles rentrants, étant les angles saillants du polygone de n côtés et de l'espèce $p-1$, valent ensemble $[n-2(p-1)]\pi$, et, puisqu'ils sont égaux entre eux, chacun d'eux vaudra $\frac{[n-2(p-1)]\pi}{n}$. En représentant l'un quelconque de ces angles par β, on a, par conséquent,

$$\text{(II)} \qquad \beta = \pi - \frac{2(p-1)\pi}{n} = 2 \text{ droits} - \frac{4(p-1)}{n} \text{ d'angle droit.}$$

24. Corollaire. — Les deux formules (I) et (II) nous donnent

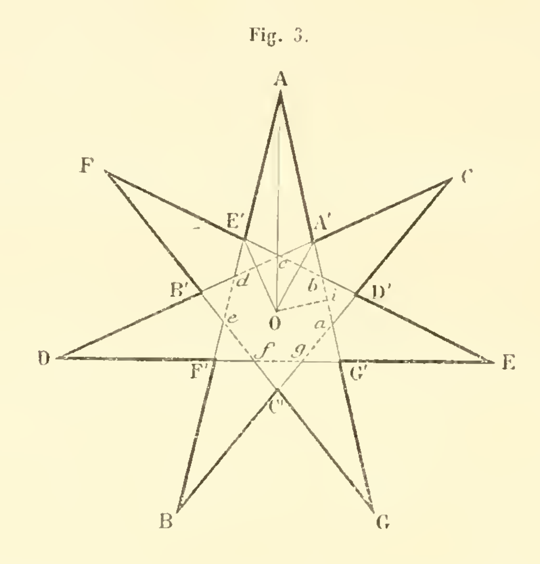
$$\beta - \alpha = -\frac{(2p-1)\pi}{n} + \frac{2p\pi}{n} = \frac{\pi}{n}.$$

Donc, *dans tout polygone régulier étoilé de n côtés, la différence entre un angle rentrant et un angle saillant est égale à la $n^{\text{ième}}$ partie de deux angles droits.*

25. Théorème II. — *L'angle au centre d'un polygone régulier étoilé, de n côtés et de l'espèce p, est égal à la $n^{\text{ième}}$ partie de p fois quatre angles droits.*

En effet, soient O le centre d'un polygone régulier étoilé (*fig.* 3),

Fig. 3.



AG un de ses côtés et Oi la perpendiculaire abaissée du centre O sur ce côté.

Dans le triangle rectangle OAi, l'angle OAi est la moitié de l'angle α du polygone régulier, et l'angle AOi est la moitié de l'angle au centre de ce polygone. Or les deux angles OAi et AOi sont évidemment complémentaires; par suite, si nous désignons par γ l'angle au centre, nous aurons

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2},$$

d'où nous tirons

$$\gamma=\pi-\alpha.$$

Mais la formule (I) nous donne

$$\pi - \alpha = \frac{2p\pi}{n};$$

donc nous avons

(III) $$\gamma = \frac{2p\pi}{n} = \frac{p}{n} 2\pi.$$

26. Corollaire. — Cette formule prouve que :

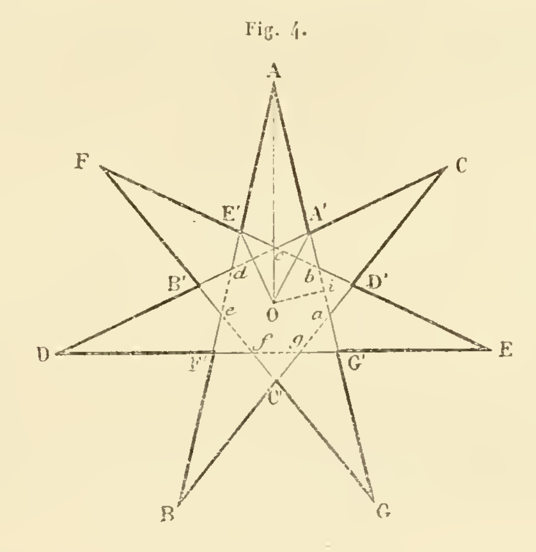
Le périmètre d'un polygone régulier de l'espèce p sous-tend p fois la circonférence, ce que nous savions déjà (n° 3).

27. *Relations entre le côté, le rayon et l'apothème d'un polygone régulier étoilé.* Représentons, en général, par

$$C_{c,e}, \ R_{c,e}, \ r_{c,e}$$

le côté, le rayon et l'apothème du polygone régulier étoilé de c côtés et de l'espèce e. Dans le triangle rectangle OAi (*fig.* 4), l'hypoténuse

Fig. 4.



OA est le rayon du cercle circonscrit, le côté Oi est le rayon du cercle inscrit, et le second côté Ai est le demi-côté du polygone régulier. Ce

triangle donne

$$\begin{aligned} Ai &= OA \sin AOi,\\ Oi &= OA \cos AOi,\\ Ai &= Oi \operatorname{tang} AOi. \end{aligned}$$

Supposons que le polygone ait n côtés et soit de l'espèce p. L'angle AOi étant le demi-angle au centre, on aura (nº **25**)

$$AOi = \frac{p\pi}{n};$$

par suite, les trois égalités précédentes reviennent à

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} C_{n,p} &= 2R_{n,p} \sin \frac{p\pi}{n},\\ r_{n,p} &= R_{n,p} \cos \frac{p\pi}{n},\\ C_{n,p} &= 2r_{n,p} \operatorname{tang} \frac{p\pi}{n}. \end{aligned} \right.$$

28. *Polygones réguliers de n côtés inscrits dans le même cercle.* — Soit R le rayon de ce cercle. La première des relations (IV) nous donne

$$C_{n,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{n},$$

$$C_{n,p-1} = 2R \sin \frac{p-1}{n} \pi;$$

nous en tirons

$$\text{(V)} \quad C_{n,p} = \frac{\sin \frac{p\pi}{n}}{\sin \frac{p-1}{n}\pi} C_{n,p-1}.$$

Par la seconde des égalités (IV), nous avons

$$r_{n,p} = R \cos \frac{p\pi}{n},$$

$$r_{n,p-1} = R \cos \frac{p-1}{n} \pi,$$

d'où il nous vient

(VI) $$r_{n,p} = \frac{\cos\frac{p\pi}{n}}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}\, r_{n,p-1}.$$

Ces deux dernières relations nous donnent

$$\frac{r_{n,p-1}}{r_{n,p}} - \frac{C_{n,p-1}}{C_{n,p}} = \frac{\cos\frac{p-1}{n}\pi}{\cos\frac{p\pi}{n}} - \frac{\sin\frac{p-1}{n}\pi}{\sin\frac{p\pi}{n}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2p\pi}{n}},$$

ou

$$\frac{r_{n,p-1}}{r_{n,p}} = \frac{C_{n,p-1}}{C_{n,p}} + \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2p\pi}{n}}.$$

Mais, puisque

$$C_{n,1} = 2R\sin\frac{\pi}{n}, \quad C_{n,2p} = 2R\sin\frac{2p\pi}{n},$$

on a

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2p\pi}{n}} = \frac{2C_{n,1}}{C_{n,2p}}.$$

Donc il vient

(VII) $$\frac{r_{n,p-1}}{r_{n,p}} = \frac{C_{n,p-1}}{C_{n,p}} + \frac{2C_{n,1}}{C_{n,2p}}.$$

29. Théorème IV. — *Les côtés de deux polygones réguliers correspondants sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle commun, qui est circonscrit aux deux polygones.*

Représentons par R le rayon du cercle circonscrit à deux polygones réguliers, l'un d'un nombre impair n de côtés et l'autre d'un nombre double $2n$ de côtés, qui sont des espèces respectives p et $n-2p$ (n° 9). Les côtés de ces deux polygones seront (n° 27)

(1) $$\begin{cases} C_{n,p} = 2R\sin\frac{p\pi}{n}, \\ C_{2n,n-2p} = 2R\sin\frac{n-2p}{2n}\pi. \end{cases}$$

Or il est aisé de voir que

$$\frac{n-2p}{2n}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n};$$

par suite, il vient

$$(2) \qquad C_{2n,n-2p} = 2R\cos\frac{p\pi}{n}.$$

Élevant au carré les deux côtés (1) et (2), et ajoutant, on obtient la relation

$$(\mathrm{VIII}) \qquad C_{n,p}^2 + C_{2n,n-2p}^2 = 4R^2,$$

qui démontre la proposition énoncée.

30. *Remarque.* — La relation précédente permet de calculer les côtés des polygones réguliers d'un nombre impair n de côtés lorsqu'on connaît ceux des polygones réguliers de $2n$ côtés, et réciproquement.

31. *Première application.* — *Les côtés des deux pentagones réguliers peuvent* ainsi *s'obtenir au moyen des côtés des deux décagones réguliers, que l'on sait être*

$$C_{10,1} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}-1), \quad C_{10,3} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}+1).$$

Car on a (n° **29**)

$$C_{5,1}^2 = 4R^2 - C_{10,3}^2 = 4R^2 - \tfrac{1}{4}R^2(\sqrt{5}+1)^2 = \tfrac{1}{4}R^2(10-2\sqrt{5}),$$
$$C_{5,2}^2 = 4R^2 - C_{10,1}^2 = 4R^2 - \tfrac{1}{4}R^2(\sqrt{5}-1)^2 = \tfrac{1}{4}R^2(10+2\sqrt{5}),$$

d'où l'on tire les valeurs suivantes,

$$C_{5,1} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad C_{5,2} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

pour les côtés des deux pentagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé.

32. *Deuxième application.* — Si l'on connaît les côtés des quatre

pentédécagones réguliers, on pourra aussi *calculer les côtés des quatre polygones réguliers de trente côtés*, qui leur sont naturellement correspondants.

Les côtés des quatre pentédécagones réguliers s'obtiennent par un procédé très simple, qui se trouve exposé au n° **43**. Ces côtés sont

$$
\begin{aligned}
C_{15,7} &= \tfrac{1}{4}R\left(\ \ \sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}\right),\\
C_{15,4} &= \tfrac{1}{4}R\left(\ \ \sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right),\\
C_{15,2} &= \tfrac{1}{4}R\left(-\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}\right),\\
C_{15,1} &= \tfrac{1}{4}R\left(\ \ \sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right).
\end{aligned}
$$

Substituant ces valeurs dans la formule (VIII), on trouve de suite, en effectuant les calculs, que

$$
\begin{aligned}
C_{30,1} &= \tfrac{1}{4}R\sqrt{36-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right),\\
C_{30,7} &= \tfrac{1}{4}R\sqrt{36+4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right),\\
C_{30,11} &= \tfrac{1}{4}R\sqrt{36-4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right),\\
C_{30,13} &= \tfrac{1}{4}R\sqrt{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)
\end{aligned}
$$

sont les côtés des quatre polygones réguliers de trente côtés, qui sont inscrits dans le cercle de rayon R.

On trouvera au n° **44** un procédé plus simple et plus rapide pour obtenir ces côtés, et où se trouve évitée l'extraction des racines carrées.

33. THÉORÈME V. — *Étant donnés deux polygones réguliers, l'un d'un nombre impair n de côtés et l'autre d'un nombre double $2n$ de côtés ; si ces polygones sont correspondants et des espèces respectives p et q, le produit de leurs côtés sera égal au rayon commun* R *multiplié par le côté du polygone régulier qui a autant de côtés n que le premier de ces polygones et qui est de la même espèce q que le second.*

On a (n° **27**)

$$C_{n,p} = 2R\sin\frac{p\pi}{n},\quad C_{2n,q} = 2R\sin\frac{q\pi}{2n},$$

d'où l'on tire

$$C_{n,p} \times C_{2n,q} = 4R^2 \sin\frac{p\pi}{n} \sin\frac{q\pi}{2n}.$$

Puisque les deux polygones sont correspondants, il vient la relation (n° **9**)

$$2p + q = n,$$

d'où l'on tire

$$q = n - 2p,$$

et par suite

$$\sin\frac{q\pi}{2n} = \sin\frac{n-2p}{2n}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n}\right) = \cos\frac{p\pi}{n}.$$

Le produit de nos côtés devient, par conséquent,

$$C_{n,p} \times C_{2n,q} = 4R^2 \sin\frac{p\pi}{n} \cos\frac{p\pi}{n} = 2R^2 \sin\frac{2p\pi}{n} = R.2R \sin\frac{n-2p}{n}\pi$$

ou

$$\text{(IX)} \qquad C_{n,p} \times C_{2n,q} = R.2R \sin\frac{q\pi}{n} = R \times C_{n,q},$$

ce qu'il fallait prouver.

54. *Application.* — Ainsi l'on a

$$C_{5,2} \times C_{10,1} = R \times C_{5,1},$$
$$C_{5,1} \times C_{10,3} = R \times C_{5,3} = R \times C_{5,2}.$$

ou

$$\tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}-1) = R \times \tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$\tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}} \times \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}+1) = R \times \tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

c'est-à-dire

$$(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

ce qu'il est d'ailleurs bien aisé de vérifier.

55. Théorème VI. — *Les côtés de deux polygones réguliers conjugués, inscrits dans le même cercle, sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit aux deux polygones.*

Soit, en effet,

$$(3) \qquad C_{2n,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{2n}$$

le côté d'un polygone régulier ayant un nombre doublement pair $2n$ de côtés et étant de l'espèce p. Le côté de son conjugué, parmi ceux de $2n$ côtés, sera (nº **11**)

$$C_{2n,n-p} = 2R \sin \frac{n-p}{2n}\pi$$

ou

$$C_{2n,n-p} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{2n}\right).$$

On a donc

$$(4) \qquad C_{2n,n-p} = 2R \cos \frac{p\pi}{2n}.$$

Élevant au carré les deux côtés (3) et (4) et ajoutant, on obtient la relation

$$(X) \qquad C^2_{2n,p} + C^2_{2n,n-p} = 4R^2.$$

56. *Application.* — Connaissant les côtés de l'une des moitiés des polygones réguliers d'un nombre doublement pair $2n$ de côtés, on peut, au moyen de ce théorème, calculer les côtés de l'autre moitié des polygones réguliers de $2n$ côtés.

57. Théorème VII. — *Le produit des côtés de deux polygones réguliers conjugués est égal au rayon multiplié par le côté du polygone régulier d'un nombre de côtés deux fois moindre, mais de même espèce que l'un ou l'autre des deux premiers polygones.*

Puisqu'on a

$$C_{2n,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{2n}, \quad C_{2n,n-p} = 2R \cos \frac{p\pi}{2n},$$

on obtient, en multipliant,

$$C_{2n,p} \times C_{2n,n-p} = 4R^2 \sin\frac{p\pi}{2n}\cos\frac{p\pi}{2n} = 2R^2\sin\frac{p\pi}{n}.$$

Or nous savons que

$$2R\sin\frac{p\pi}{n} = 2R\sin\frac{n-p}{n}\pi = C_{n,p} = C_{n,n-p};$$

donc il vient

$$C_{2n,p} \times C_{2n,n-p} = R \times C_{n,p} = R \times C_{n,n-p}.$$

§ IV. — Inscription dans le cercle des polygones réguliers de cinq, huit, dix, douze, quinze, trente, soixante et cent vingt côtés.

38. Dans tout ce paragraphe, nous ne considérons que les polygones réguliers à périmètre continu.

39. *Pentagones réguliers.* — Il existe deux pentagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé. Ce dernier est de deuxième espèce.

En appelant toujours R le rayon du cercle circonscrit à nos polygones réguliers, on a de suite

$$(1)\qquad \begin{cases} C_{5,1} = 2R\sin\frac{\pi}{5} = 2R\sin 36^o = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \\ C_{5,2} = 2R\sin\frac{2\pi}{5} = 2R\sin 72^o = \frac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}. \end{cases}$$

On en déduit

$$C_{5,1}^2 + C_{5,2}^2 = 5R^2.$$

Ainsi, *la somme des carrés des côtés des deux pentagones réguliers est égale au quintuple carré du rayon.*

40. *Octogones réguliers.* — Il y a aussi deux octogones réguliers,

dont l'étoilé est de troisième espèce. On a donc

$$C_{8,1} = 2R\sin\frac{\pi}{8} = 2R\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$C_{8,3} = 2R\sin\frac{3\pi}{8} = 2R\cos\frac{\pi}{8} = 2R\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = R\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

On en tire

$$C_{8,1}^2 + C_{8,3}^2 = 4R^2.$$

Donc, *dans les deux octogones réguliers, la somme des carrés des côtés est égale au carré du diamètre du cercle circonscrit.*

41. *Décagones réguliers.* — On compte deux décagones réguliers, dont l'étoilé est de troisième espèce. Les côtés de ces deux polygones s'obtiennent en divisant le rayon en moyenne et extrême raison, et ont pour valeurs les deux solutions fournies par cette division. Ces côtés sont ainsi

$$\text{(II)}\qquad \left\{\begin{aligned} C_{10,1} &= 2R\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1),\\ C_{10,3} &= 2R\sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}+1).\end{aligned}\right.$$

On en conclut d'abord

$$C_{10,1} \times C_{10,3} = R^2,$$

puis

$$C_{10,3} - C_{10,1} = R.$$

Ainsi : 1° *le rayon est moyen proportionnel entre les côtés des deux décagones réguliers ;* 2° *il est égal à la différence des côtés de ces deux décagones.*

On a encore

$$C_{10,1}^2 + C_{10,3}^2 = 3R^2.$$

La somme des carrés des côtés des deux décagones réguliers est égale au triple carré du rayon.

42. *Dodécagones réguliers.* — Il y a, outre le dodécagone régulier convexe, un dodécagone régulier étoilé, qui est de cinquième espèce.

Les côtés de ces deux polygones sont

$$C_{12,1} = 2R\sin\frac{\pi}{12} = 2R\sin 15^\circ,$$

$$C_{12,5} = 2R\sin\frac{5\pi}{12} = 2R\cos\frac{\pi}{12} = 2R\cos 15^\circ.$$

Puisque

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$

on a

$$C_{12,1} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = R\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$C_{12,5} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = R\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Ces expressions donnent

$$C_{12,1}\times C_{12,5} = R^2, \quad C_{12,1}^2 + C_{12,5}^2 = 4R^2.$$

Ainsi : 1° *le rayon est moyen proportionnel entre les côtés des deux dodécagones réguliers;* 2° *la somme des carrés des côtés des deux dodécagones réguliers est égale au carré du diamètre du cercle circonscrit.*

43. *Pentédécagones réguliers.* — Il existe quatre polygones réguliers de quinze côtés, dont les trois étoilés sont des espèces 2, 4 et 7. Les côtés de ces polygones sont donc

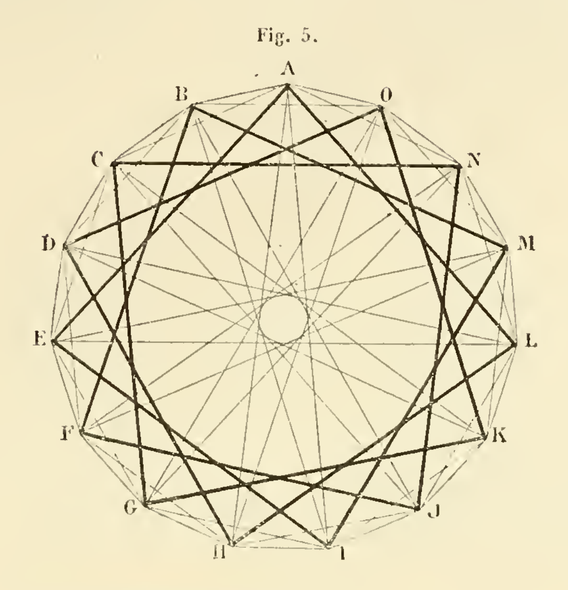
$$(1)\quad \begin{cases} C_{15,1} = 2R\sin\frac{\pi}{15}, \\ C_{15,2} = 2R\sin\frac{2\pi}{15}, \\ C_{15,4} = 2R\sin\frac{4\pi}{15}, \\ C_{15,7} = 2R\sin\frac{7\pi}{15}. \end{cases}$$

Les sinus des quatre arcs

$$\frac{\pi}{15},\quad \frac{2\pi}{15},\quad \frac{4\pi}{15},\quad \frac{7\pi}{15}$$

peuvent aisément se calculer en valeur de sinus et cosinus d'arcs plus

Fig. 5.



simples que l'on connaît déjà, car on a

$$(2)\qquad \frac{\pi}{15}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{10},\quad \frac{2\pi}{15}=\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{6},\quad \frac{4\pi}{15}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{10},\quad \frac{7\pi}{15}=\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{6}.$$

Si l'on observe que

$$\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),\quad \cos\frac{\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1),\quad \cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

et que l'on substitue dans les égalités (1), après y avoir développé les

seconds membres suivant les identités (2), on trouvera de suite que

$$
\text{(III)}\quad
\begin{cases}
C_{15,1} = \frac{1}{4}R\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right),\\
C_{15,2} = \frac{1}{4}R\left(-\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3}\right),\\
C_{15,4} = \frac{1}{4}R\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}\right),\\
C_{15,7} = \frac{1}{4}R\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)\ [1].
\end{cases}
$$

La comparaison de ces expressions nous fournit les deux relations

$$C_{15,1} + C_{15,4} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}} = C_{5,2},$$
$$C_{15,7} - C_{15,2} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}} = C_{5,1}.$$

Ainsi : 1° *la somme des côtés des deux pentédécagones réguliers des espèces* 1 *et* 4, *inscrits dans le même cercle, est égale au côté du pentagone régulier étoilé qui est inscrit dans ce cercle;* 2° *la différence des côtés des deux pentédécagones réguliers des espèces* 7 *et* 2, *inscrits dans le même cercle, est égale au côté du pentagone régulier convexe qui est inscrit dans ce cercle.*

Les formules (III) nous fournissent aussi les égalités

$$C_{15,1} \times C_{15,4} = \tfrac{1}{2}R^2(\sqrt{5}-1) = R \times C_{10,1},$$
$$C_{15,2} \times C_{15,7} = \tfrac{1}{2}R^2(\sqrt{5}+1) = R \times C_{10,3}.$$

Donc : 1° *le rayon est la quatrième proportionnelle au côté du décagone régulier convexe et aux côtés des deux pentédécagones réguliers des espèces* 1 *et* 4; 2° *il est aussi la quatrième proportionnelle au côté du décagone régulier étoilé et aux côtés des deux pentédécagones réguliers des espèces* 2 *et* 7.

Si l'on élève au carré les quatre valeurs (III), et que l'on ajoute les résultats, on trouvera que

$$C_{15,1}^2 + C_{15,2}^2 + C_{15,4}^2 + C_{15,7}^2 = 7R^2.$$

---

[1] Ces côtés se trouvent calculés par la Géométrie pure, d'une manière fort élégante, dans le Traité de MM. Rouché et de Comberousse, 4e édition, Ire Partie, p. 173.

Donc, *la somme des carrés des côtés de quatre pentédécagones réguliers, qui sont inscrits dans le même cercle, est égale à sept fois le carré du rayon.*

44. *Polygones réguliers de trente côtés.* — Comme la moitié de 30 est un nombre impair, il existe aussi quatre polygones réguliers de trente côtés (n° 8), dont les trois étoilés sont des espèces 7, 11 et 13.

Les côtés de ces quatre polygones sont

$$\begin{aligned}
C_{30,1} &= 2R\sin\frac{\pi}{30} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right),\\
C_{30,7} &= 2R\sin\frac{7\pi}{30} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}\right),\\
C_{30,11} &= 2R\sin\frac{11\pi}{30} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}\right),\\
C_{30,13} &= 2R\sin\frac{13\pi}{30} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{10}\right).
\end{aligned}$$

Développant et effectuant les substitutions convenables, on trouve que

$$(\text{VI})\quad \left\{\begin{aligned}
C_{30,1} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right),\\
C_{30,7} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right),\\
C_{30,11} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right),\\
C_{30,13} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right).
\end{aligned}\right.$$

La comparaison de ces expressions nous fournit les deux relations

$$\begin{aligned}
C_{30,11}-C_{30,1} &= \tfrac{1}{2}R\left(\sqrt{5}+1\right) = C_{10,3},\\
C_{30,13}-C_{30,7} &= \tfrac{1}{2}R\left(\sqrt{5}-1\right) = C_{10,1},
\end{aligned}$$

qui prouvent que :

1° *La différence entre les côtés des polygones réguliers de trente*

côtés et des espèces 11 *et* 1, *inscrits dans le même cercle, est égale au côté du décagone régulier étoilé qui est inscrit dans ce cercle.*

2° *La différence entre les côtés des polygones réguliers de trente côtés et des espèces* 13 *et* 7, *inscrits dans le même cercle, est égale au côté du décagone régulier convexe qui est inscrit dans ce cercle.*

Les mêmes formules (IV) nous donnent aussi

$$C_{30,1} \times C_{30,11} = \tfrac{1}{4}R^2(6 - 2\sqrt{5}) = C^2_{10,1},$$
$$C_{30,7} \times C_{30,13} = \tfrac{1}{4}R^2(6 + 2\sqrt{5}) = C^2_{10,3}.$$

On en conclut que :

1° *Le côté du décagone régulier convexe est moyen proportionnel entre les côtés des deux polygones réguliers de trente côtés, des espèces* 1 *et* 11.

2° *Le côté du décagone régulier étoilé est moyen proportionnel entre les côtés des deux polygones réguliers de trente côtés, des espèces* 7 *et* 13.

Nous avons, en vertu du théorème du n° 29,

$$C^2_{30,1} = 4R^2 - C^2_{15,7}, \quad C^2_{30,7} = 4R^2 - C^2_{15,4},$$
$$C^2_{30,11} = 4R^2 - C^2_{15,2}, \quad C^2_{30,13} = 4R^2 - C^2_{15,1},$$

et par suite, en ajoutant,

$$C^2_{30,1} + C^2_{30,7} + C^2_{30,11} + C^2_{30,13}$$
$$= 16R^2 - (C^2_{15,1} + C^2_{15,2} + C^2_{15,4} + C^2_{15,7}) = 9R^2.$$

Donc, *la somme des carrés des côtés des quatre polygones réguliers de trente côtés qui sont inscrits dans le même cercle est égale à neuf fois le carré du rayon.*

45. *Polygones réguliers de soixante côtés.* — Il existe huit polygones réguliers de soixante côtés, dont les espèces sont 1, 7, 11, 13,

17, 19, 23 et 29. Leurs côtés seront donc

$$C_{60,1} = 2R\sin\frac{\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{30}\right),$$
$$C_{60,7} = 2R\sin\frac{7\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{15}\right),$$
$$C_{60,11} = 2R\sin\frac{11\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{15}\right),$$
$$C_{60,13} = 2R\sin\frac{13\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{30}\right),$$
$$C_{60,29} = 2R\sin\frac{29\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{30}\right),$$
$$C_{60,23} = 2R\sin\frac{23\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{15}\right),$$
$$C_{60,19} = 2R\sin\frac{19\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{15}\right),$$
$$C_{60,17} = 2R\sin\frac{17\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{30}\right).$$

Développant et substituant, on obtient les valeurs

$$C_{60,1} = \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right],$$
$$C_{60,7} = \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)\right],$$
$$C_{60,11} = \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)\right],$$
$$C_{60,13} = \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right],$$
$$C_{60,17} = \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)\right],$$
$$C_{60,19} = \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)\right],$$
$$C_{60,23} = \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)\right],$$
$$C_{60,29} = \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)\right].$$

Les huit polygones réguliers de soixante côtés à périmètre continu sont conjugués deux à deux; nous avons par suite, en vertu du théo-

rème du n° 35,

$$C^2_{60,1} + C^2_{60,29} = C^2_{60,7} + C^2_{60,23} = 4R^2,$$
$$C^2_{60,11} + C^2_{60,19} = C^2_{60,13} + C^2_{60,17} = 4R^2.$$

On en conclut que :

La somme des carrés des côtés des huit polygones réguliers de soixante côtés, qui sont inscrits dans le même cercle, est égale à seize fois le carré rayon.

46. *Polygones réguliers de cent vingt côtés.* — Ces polygones sont au nombre de seize. On pourra calculer les côtés de ces polygones en suivant la même méthode. Il suffira de faire usage des identités suivantes :

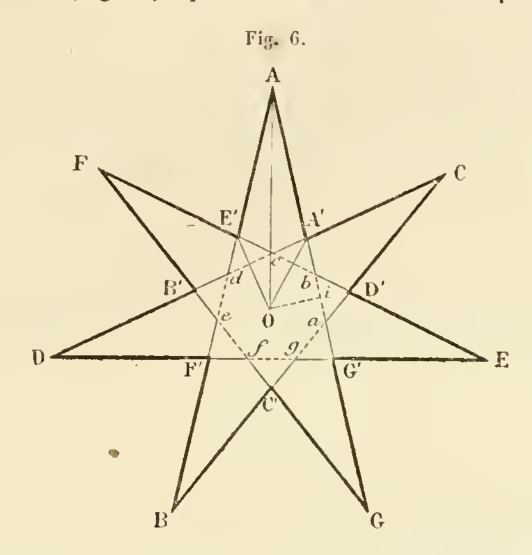
$$\frac{\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{7\pi}{60}, \quad \frac{29\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{60},$$
$$\frac{7\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{15}, \quad \frac{23\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{15},$$
$$\frac{11\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{30}, \quad \frac{19\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{30},$$
$$\frac{13\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{60}, \quad \frac{17\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{60},$$
$$\frac{31\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{7\pi}{60}, \quad \frac{59\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} + \frac{7\pi}{60},$$
$$\frac{37\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{15}, \quad \frac{53\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{15},$$
$$\frac{41\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{30}, \quad \frac{49\pi}{60} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{30},$$
$$\frac{43\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{60}, \quad \frac{47\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{60}.$$

47. Ce mode de calcul, comme l'on voit, fournit toutes les valeurs que donne la résolution de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$. Il a l'avantage d'être plus élémentaire et surtout plus facile.

§ V. — Surface des polygones réguliers étoilés.

48. *Surface du polygone régulier de n côtés et de l'espèce p en valeur du rayon du cercle circonscrit.* — Considérons le polygone régulier ABC...EFG (*fig.* 6), qui a n côtés et dont l'espèce est p.

Fig. 6.



Joignons le centre O à un sommet A de ce polygone, ainsi qu'aux deux sommets voisins A' et E' du polygone régulier de n côtés et de l'espèce $p - 1$, qui sont situés sur les côtés issus du sommet A dans le polygone de l'espèce p.

Du centre O abaissons en même temps la perpendiculaire Oi sur le côté AG.

La droite OA sera le rayon R du cercle circonscrit à notre polygone régulier; la droite Oi sera le rayon r du cercle inscrit, et la ligne Ai sera le demi-côté $\frac{1}{2}$C du polygone régulier.

La surface de notre polygone se composera évidemment de n quadrilatères, tels que AA'OE', ou de $2n$ triangles, tels que AA'O. En désignant, en général, par $S_{c,e}$ la surface du polygone régulier qui a c côtés et qui est de l'espèce e, nous avons ainsi

$$S_{n,p} = 2n . \mathrm{AA'O}.$$

Le triangle $AA'O$ est parfaitement déterminé, car nous y connaissons le côté AO, qui est le rayon R du cercle circonscrit, ainsi que les deux angles OAA' et AOA'.

L'angle OAA' est en effet la moitié de l'un des n angles saillants de notre polygone régulier; il a donc pour valeur (n° 25),

$$OAA' = \frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n}.$$

L'angle AOA' est égal à la différence entre les demi-angles au centre AOi et $A'Oi$ des deux polygones réguliers de n côtés, qui sont le premier de l'espèce p et le second de l'espèce $p-1$; il vient, par suite (n° 25),

$$AOA' = \frac{p\pi}{n} - \frac{p-1}{n}\pi = \frac{\pi}{n}.$$

On sait que la surface d'un triangle en valeur du côté a et des deux angles adjacents B et C est exprimée par la fraction

$$\frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B+C)}.$$

Comme nous avons $a = R$ et

$$\sin B = \sin OAA' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n}\right) = \cos\frac{p\pi}{n},$$

$$\sin C = \sin AOA' = \sin\frac{\pi}{n},$$

$$\sin(B+C) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right) = \cos\frac{p-1}{n}\pi,$$

$2n$ fois la surface du triangle $AA'O$ sera

$$(1) \qquad S_{n,p} = nR^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p\pi}{n}}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

Telle est l'expression de la surface du polygone régulier de n côtés et de l'espèce p.

49. *Remarque.* — Dans le calcul précédent, nous n'avons établi

aucune restriction sur la nature du polygone régulier. La formule (I) est ainsi générale et convient aussi bien aux polygones réguliers à périmètre composé qu'aux polygones réguliers à périmètre continu. Elle s'applique donc indistinctement à tous les polygones réguliers, qu'ils soient étoilés ou pseudo-étoilés.

50. Corollaire I. — Si nous posons $p = 1$ dans la formule précédente, le facteur de $n\mathrm{R}^2$ deviendra

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\cos 0} = \frac{1}{2}\,2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

et nous aurons

$$\mathrm{S}_{n,1} = \frac{1}{2}n\mathrm{R}^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

pour l'*expression de la surface des polygones convexes de n côtés*.

51. Corollaire II. — Si l'on fait $p = 2$ dans la même formule, elle deviendra

$$\mathrm{S}_{n,2} = n\mathrm{R}^2\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}.$$

52. *Surface d'un polygone régulier en valeur du rayon r du cercle inscrit.* — La seconde des formules (IV) du n° **27** nous donne $\mathrm{R} = \frac{r}{\cos\frac{p\pi}{n}}$. Substituant dans l'expression (I), nous obtenons, après réduction,

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{S}_{n,p} = nr^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{n}\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

53. Corollaire I. — Si nous faisons $p = 1$ dans cette formule, nous aurons

$$\mathrm{S}_{n,1} = nr^2\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{n}$$

pour la *surface du polygone régulier convexe de n côtés, en valeur du rayon du cercle inscrit*.

54. Corollaire II. — Si nous posons $p = 2$ dans la formule (II), nous trouvons que *la surface des polygones réguliers de n côtés et de la deuxième espèce* est exprimée par

$$S_{n,2} = nr^2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \operatorname{séc} \frac{2\pi}{n}.$$

55. *Remarque.* — Supposons que ces derniers polygones soient circonscrits à un même cercle. Si leurs côtés sont dirigés suivant les mêmes droites, la différence D_n de leurs surfaces sera égale à la somme de n triangles que l'on forme en prolongeant, de deux en deux, les n côtés du polygone régulier convexe. Cette différence est donc

$$D_n = nr^2 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{séc} \frac{2\pi}{n} - 1\right).$$

Ainsi, si les deux pentagones réguliers sont circonscrits à un même cercle de rayon r, la différence de leurs surfaces sera

$$D_5 = 5r^2\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}.$$

56. *Surface d'un polygone régulier en valeur de son côté.* — La troisième des formules (IV) du n° **27** nous donne

$$r = \frac{C}{2} \cos \frac{p\pi}{n}.$$

Mettant cette valeur dans (II), nous trouvons que

$$\text{(III)} \qquad S_{n,p} = \frac{1}{4} n C^2 \frac{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{p\pi}{n}}{\sin^2 \frac{p\pi}{n} \cos \frac{p-1}{n}\pi}.$$

57. *Surface d'un polygone régulier en valeur des rayons* R *et* r *des cercles, l'un circonscrit et l'autre inscrit.* — La formule (I) peut s'écrire

$$S_{n,p} = nR.R\cos \frac{p\pi}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{p-1}{n}\pi},$$

et, comme on a $R\cos\frac{p\pi}{n} = r$, il vient aussi

$$(IV) \qquad S_{n,p} = nRr\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

58. Corollaire I. — Si nous faisons $p = 1$ dans cette expression, nous aurons

$$S_{n,1} = nRr\sin\frac{\pi}{n},$$

pour la *surface des polygones réguliers convexes de n côtés.*

59. Corollaire II. — En posant $p = 2$ dans la même expression, on trouve

$$S_{n,2} = nRr\tang\frac{\pi}{n}$$

pour la *surface des polygones réguliers de deuxième espèce.*

60. *Surface d'un polygone régulier en valeur du côté et du rayon du cercle circonscrit.* — Dans la formule (I), remplaçons l'un des facteurs R par sa valeur $\frac{C}{2\sin\frac{p\pi}{n}}$ en fonction de C; elle devient

$$(V) \qquad S_{n,p} = \frac{1}{2}nCR\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p\pi}{n}}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

61. Corollaire I. — Posant $p = 1$, on trouve

$$S_{n,1} = \frac{1}{2}nCR\cos\frac{\pi}{n}$$

pour la *surface du polygone régulier convexe de n côtés.*

62. Corollaire II. — En faisant $p = 2$, on obtient

$$S_{n,2} = \frac{1}{2}nCR\tang\frac{\pi}{n}\cot\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{4}nCR\left(1 - \tang^2\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{4}nCR\frac{\cos\frac{2\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}.$$

63. *Surface d'un polygone régulier en valeur du côté et du rayon du cercle inscrit.* — Dans la formule (II), remplaçons l'un des facteurs r par son équivalent $\frac{1}{2}C\cot\frac{p\pi}{n}$; nous aurons aussi

$$\text{(VI)} \qquad S_{n,p} = \frac{1}{2}nrC\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{p\pi}{n}\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

64. Corollaire I. — Si l'on fait $p=1$, on aura la formule connue

$$S_{n,1} = \frac{1}{2}nrC$$

pour la *surface du polygone régulier convexe de n côtés.*

65. Corollaire II. — En posant $p=2$, on trouve

$$S_{n,2} = \frac{1}{4}nrC\,\text{séc}^2\frac{\pi}{n}$$

pour la *surface des polygones réguliers de deuxième espèce.*

66. Puisque nous avons

$$\sin\frac{\pi}{n} = \sin\left(\frac{p\pi}{n} - \frac{p-1}{n}\pi\right) = \sin\frac{p\pi}{n}\cos\frac{p-1}{n}\pi - \sin\frac{p-1}{n}\pi\cos\frac{p\pi}{n},$$

la formule (II) peut s'écrire

$$S_{n,p} = nr^2\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{n}} - \frac{\sin\frac{p-1}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}\right)$$

ou

$$\text{(VII)} \qquad S_{n,p} = nr^2\left(\text{tang}\frac{p\pi}{n} - \text{tang}\frac{p-1}{n}\pi\right).$$

Or les deux triangles rectangles AOi et $A'Oi$ (*fig.* 7) nous donnent

$$Ai = r\,\text{tang}\frac{p\pi}{n}, \quad A'i = r\,\text{tang}\frac{p-1}{n}\pi,$$

d'où nous tirons

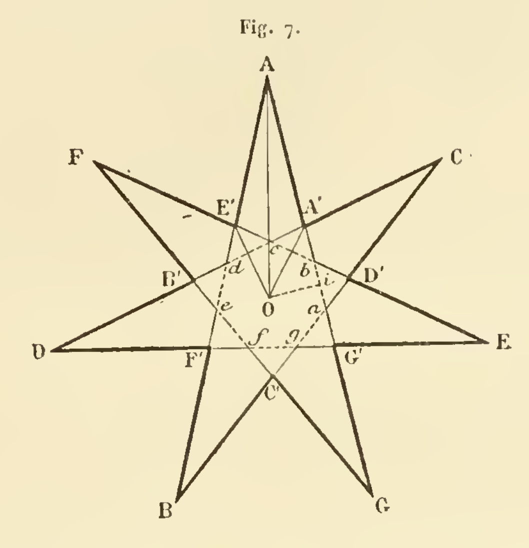
$$AA' = r\left(\tang\frac{p\pi}{n} - \tang\frac{p-1}{n}\pi\right).$$

L'expression (VII) devient ainsi

$$S_{n,p} = nr.AA' = n.2AA'.\tfrac{1}{2}r.$$

Mais n fois $2AA'$ ou n fois $(AA' + GG')$ représente évidemment le péri-

Fig. 7.



mètre apparent du polygone régulier étoilé. Donc on peut dire que :

La surface d'un polygone régulier étoilé a pour mesure le produit de son périmètre apparent par la moitié du rayon du cercle inscrit.

Cette proposition devient d'ailleurs évidente par l'inspection directe de la figure, puisqu'on a

$$\text{surf. } AA'O = AA'.\tfrac{1}{2}Oi = AA'.\tfrac{1}{2}r,$$

et, par suite,

$$2n \text{ surf. } AA'O = n(AA' + GG')\tfrac{1}{2}r.$$

67. Théorème I. — *La surface d'un polygone régulier, qui a un nombre impair n de côtés et qui est de l'espèce la plus élevée* $\frac{n-1}{2}$, *est la moitié de la surface du polygone régulier inscrit dans le même*

cercle, qui a un nombre double $2n$ de côtés et qui est aussi de l'espèce la plus élevée $n-2$.

Si nous appelons R le rayon du cercle circonscrit à nos deux polygones réguliers, la surface du premier polygone sera (nº **48**)

$$S_{n,\frac{n-1}{2}} = nR^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{n-1}{2n}\pi}{\cos\frac{n-3}{2n}\pi},$$

pendant que celle du second polygone régulier sera

$$S_{2n,n-2} = 2nR^2 \frac{\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n-2}{2n}\pi}{\cos\frac{n-3}{2n}\pi}.$$

Or ces deux expressions ont même dénominateur $\cos\frac{n-3}{2n}\pi$. Au numérateur de la première se trouve le facteur

$$\cos\frac{n-1}{2n}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right) = \sin\frac{\pi}{2n},$$

pendant que le numérateur de la seconde contient le facteur

$$\cos\frac{n-2}{2n}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right) = \sin\frac{\pi}{n}.$$

Il s'ensuit que les deux fractions ont aussi même numérateur. Donc on a

$$S_{n,\frac{n-1}{2}} = \tfrac{1}{2}S_{2n,n-2},$$

ce qu'il fallait prouver.

68. Corollaire. — Si l'on donne à n successivement les valeurs 3, 5, 15, 17, ...,

pour $n=3$, on aura $\frac{n-1}{2}=1$, $2n=6$, $n-2=1$,

» $n=5$, » $\frac{n-1}{2}=2$, $2n=10$, $n-2=3$,

» $n=15$, » $\frac{n-1}{2}=7$, $2n=30$, $n-2=13$,

» $n=17$, » $\frac{n-1}{2}=8$, $2n=34$, $n-2=15$, ...

Ainsi le triangle équilatéral est la moitié de l'hexagone régulier qui est inscrit dans le même cercle; la surface du pentagone régulier étoilé est la moitié de la surface du dodécagone régulier étoilé; le polygone régulier de quinze côtés et de la septième espèce est la moitié du polygone régulier de trente côtés et de la treizième espèce, etc.

69. Théorème II. — *La surface d'un polygone régulier, qui a un nombre pair* $2n$ *de côtés et qui est de l'espèce la plus élevée* $n-1$, *est à la surface du polygone régulier inscrit dans le même cercle, qui a un nombre double* $4n$ *de côtés et qui est aussi de l'espèce la plus élevée* $2n-1$, *dans le rapport de* $\cos^2\frac{\pi}{4n}$ *à* $\cos\frac{\pi}{2n}$.

En effet, la surface du polygone régulier de $2n$ côtés, qui est de l'espèce $n-1$, a pour expression

$$S_{2n,n-1} = 2nR^2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n-1}{2n}\pi}{\cos\frac{n-2}{2n}\pi} = 2nR^2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

ou

$$S_{2n,n-1} = nR^2\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n}.$$

La surface du polygone régulier de $4n$ côtés qui est de l'espèce $2n-1$ a pour expression

$$S_{4n,2n-1} = 4nR^2\frac{\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{2n-1}{4n}\pi}{\cos\frac{2n-2}{4n}\pi} = 4nR^2\frac{\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

ou

$$S_{4n,2n-1} = 2nR^2\operatorname{tang}\frac{\pi}{4n}.$$

On a donc

$$\frac{S_{2n,n-1}}{S_{4n,2n-1}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n}}{2\operatorname{tang}\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{4n}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{4n}}{\cos^2\frac{\pi}{4n}-\sin^2\frac{\pi}{4n}}$$

ou

$$\frac{S_{2n,n-1}}{S_{4n,2n-1}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{4n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}.$$

70. Théorème III. — *Lorsque deux polygones réguliers, l'un d'un nombre impair n de côtés et de l'espèce la plus élevée $\frac{n-1}{2}$, et l'autre d'un nombre double 2n de côtés et aussi de l'espèce la plus élevée n - 2, sont circonscrits à un même cercle, le rapport de leurs surfaces est égal à* $2\cos^2\frac{\pi}{2n}$.

En vertu de la formule (II) du n° 52, nous avons

$$S_{n,\frac{n-1}{2}} = nr^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{n-1}{2n}\pi\cos\frac{n-3}{2n}\pi} = nr^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}},$$

$$S_{2n,n-2} = 2nr^2 \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{n-2}{2n}\pi\cos\frac{n-3}{2n}\pi} = 2nr^2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{2n}};$$

nous en tirons

$$\frac{S_{n,\frac{n-1}{2}}}{S_{2n,n-2}} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}} = \frac{4\sin^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{\pi}{2n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}},$$

ou

$$\frac{S_{n,\frac{n-1}{2}}}{S_{2n,n-2}} = 2\cos^2\frac{\pi}{2n}.$$

71. Proposons-nous, comme application, de calculer les surfaces des polygones réguliers étoilés de cinq, huit, dix, douze et quinze côtés.

72. *Pentagone régulier étoilé.* — Nous poserons $n=5, p=2$ dans la formule (I) du n° 48; elle nous donnera

$$S_{5,2} = 5R^2\frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = 5R^2\frac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{3\pi}{10}}.$$

Mais, puisque

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),\quad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1),$$

il nous vient

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4},$$

d'où nous tirons

$$\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{10}}=4\sin\frac{\pi}{10}.$$

L'expression de notre surface devient ainsi

$$S_{5,2}=20R^2\sin\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{10}$$

ou

$$\begin{aligned}S_{5,2}&=\tfrac{5}{16}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,(\sqrt{5}-1)^2\\&=\tfrac{5}{8}R^2\sqrt{(10-2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^2}=\tfrac{5}{4}R^2\sqrt{(5-\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}.\end{aligned}$$

La surface du pentagone régulier étoilé inscrit dans le cercle de rayon R est donc

(1) $$S_{5,2}=\tfrac{5}{4}R^2\sqrt{50-22\sqrt{5}}.$$

75. *Octogone régulier étoilé.* — Puisque $n=8$, $p=3$, il vient

$$S_{8,3}=8R^2\frac{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}}{\cos\frac{2\pi}{8}}=8R^2\frac{\sin^2\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}},$$

et, comme

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 2\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{2},$$

nous aurons

$$S_{8,3}=4R^2\frac{2-\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ou

(2) $$S_{8,3}=4R^2(\sqrt{2}-1)$$

pour la surface de l'octogone régulier étoilé.

74. *Décagone régulier étoilé.* — En posant $n = 10$, $p = 3$ dans notre formule, nous obtenons

$$S_{10,3} = 10R^2 \frac{\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}} = 10R^2 \frac{\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{10}}.$$

Cette surface est donc double de celle (nº **71**) du pentagone régulier étoilé qui est inscrit dans le même cercle, ce que nous savions d'ailleurs (nº **67**). Nous avons ainsi

$$(3) \qquad S_{10,3} = \frac{5}{2}R^2\sqrt{50 - 22\sqrt{5}}.$$

75. *Dodécagone régulier étoilé.* — Nous avons, dans ce cas, $n = 12$, $p = 5$; il nous vient, par suite,

$$S_{12,5} = 12R^2 \frac{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{4\pi}{12}} = 12R^2 \frac{\sin^2\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{6}}.$$

Mais

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad 2\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos\frac{\pi}{6} = 1 - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Donc nous avons

$$(4) \qquad S_{12,5} = 6R^2(2 - \sqrt{3}).$$

76. *Pentédécagone régulier convexe.* — En faisant $n = 15$, $p = 1$ dans la formule (I), elle nous donnera

$$S_{15,1} = 15R^2\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15} = \frac{15}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{15} = \frac{15}{4}RC_{15,2}.$$

Si nous remplaçons $C_{15,2}$ par son expression (III) du nº **45**, nous

trouverons que la surface du pentédécagone régulier convexe est

$$(5)\qquad S_{15,1} = \frac{15}{8}R^2\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

77. *Pentédécagone régulier étoilé de deuxième espèce.* — Posons $n=15$, $p=2$ dans (I); il nous vient

$$S_{15,2} = 15R^2\frac{\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{15}} = 15R^2\frac{\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{11\pi}{30}}{\sin\frac{13\pi}{30}} = \frac{15}{2}R\frac{C_{15,1}C_{30,11}}{C_{30,13}}.$$

Il suffira de substituer à $C_{15,1}$, $C_{30,11}$ et $C_{30,13}$ leurs valeurs obtenues aux n^os **43** et **44** pour avoir l'expression numérique de $S_{15,2}$.

On procédera de la même manière pour déterminer les surfaces des deux autres polygones réguliers étoilés de quinze côtés.

78. Notre formule (I) nous permet aussi de *calculer la surface des polygones réguliers étoilés à périmètre composé.*

Ainsi supposons que, de deux carrés qui coïncident, l'un ait tourné d'un huitième de circonférence autour du centre commun. Il en résultera un octogone étoilé de deuxième espèce, dont la surface sera

$$S_{8,2} = 8R^2\frac{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{2\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = 8R^2\frac{\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{8}}$$

ou, puisque $\sin\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$,

$$S_{8,2} = 16R^2\sin^2\frac{\pi}{8}.$$

On a

$$2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1-\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2};$$

donc il vient

$$S_{8,2} = 4R^2(2-\sqrt{2}).$$

La surface du carré inscrit dans le même cercle étant $2R^2$, la somme des quatre triangles extérieurs sera égale à

$$4R^2(2-\sqrt{2})-2R^2=2R^2(3-2\sqrt{2})=2R^2(\sqrt{2}-1)^2$$

ou à

$$2(R\sqrt{2}-R)^2.$$

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

SUPPLÉMENT

AU

TOME VI — ANNÉE 1880

(TROISIÈME SÉRIE).

MÉMOIRE SUR L'EMPLOI DE L'ÉPAISSEUR

DANS LA

THÉORIE DES SURFACES ÉLASTIQUES;

PAR MLLE SOPHIE GERMAIN.

AVERTISSEMENT.

Mlle Sophie Germain, dans ses *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques*, publiées en 1826, a écrit cette Note [1] :

« On n'était pas d'accord sur l'exposant qui doit être attribué à l'épaisseur. J'avais montré (p. 13, n° 8, de mes *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*) [2] que l'on doit prendre la puissance quatrième. L'extrême diversité d'opinions qui régnait encore à cet égard, parmi les géomètres, m'a engagée depuis à soumettre ce résultat à un nouvel examen. Après avoir discuté tout ce qui a été publié sur ce sujet, j'ai établi que, dans le cas où l'épaisseur est uniforme, l'expérience confirme le choix de la quatrième puissance, mais seulement en fournissant les mêmes mesures que la théorie relativement à l'influence d'un changement donné d'épaisseur. Cherchant ensuite, à l'aide du calcul, quelle puissance il conviendrait d'adopter si l'épaisseur n'était pas également répartie entre tous les points de la plaque élastique, j'ai été conduite à cette singulière conclusion, que tout autre exposant mettrait la théorie et l'expérience dans une telle contradiction, que la théorie annoncerait l'impossibilité des phénomènes que l'expérience rend sensibles et mesurables; en sorte que le choix de l'exposant n'intéresserait

---

(1) *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et équation générale de ces surfaces;* par Mlle Sophie Germain. Paris, impr. de Huzard-Courcier, 1826; in-4°. Note de la page 5.

(2) *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques;* par Mlle Sophie Germain. Paris, Mme Vve Courcier, 1821; in-4°.

plus alors seulement la quantité, mais l'existence même des faits acoustiques.

» Les recherches dont je fais mention ici ont été rassemblées dans un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie il y a environ deux ans, et dont MM. de Prony et Poisson, nommés commissaires, n'ont pas encore fait le Rapport. Je publierai ce Mémoire lorsque l'examen successif de tout ce qui concerne la théorie des surfaces élastiques en amènera l'occasion. »

C'est le Mémoire mentionné dans cette Note que nous publions aujourd'hui

Sophie Germain avait confié ce Mémoire, pour qu'il fût présenté à l'Académie des Sciences, à Fourier, qui avait pour elle la plus haute estime et la plus grande amitié. Peu après, Fourier lui écrivit, à ce sujet, la Lettre suivante :

« Mademoiselle,

» Je regrette extrêmement de n'avoir pu répondre aussi promptement que je l'aurais désiré au sujet du Mémoire de Mathématique que vous nous avez envoyé. Je me suis acquitté fidèlement de la commission que vous m'aviez donnée en m'adressant cette pièce. M. Cuvier était chargé lundi dernier de la lecture de la correspondance. Je l'ai prié de présenter votre Mémoire et j'en ai indiqué l'objet. Après la lecture, on a nommé MM. Laplace, Prony et Poisson commissaires. J'insisterai autant qu'il sera nécessaire pour qu'ils fassent le Rapport que vous désirez. Si M. Poisson a le dessein de montrer quelque opposition au résultat de vos recherches, il ne pourra s'empêcher de céder à l'autorité de l'expérience que personne ne sait mieux consulter que vous. Autant que j'ai pu prendre connaissance de la discussion dont vous vous êtes occupée, il m'a paru que vous mettez dans tout son jour l'insuffisance de l'hypothèse théorique dont il a voulu déduire l'équation du quatrième ordre, que vous avez trouvée. Je n'aurais pu concourir moi-même à l'examen et au Rapport de ce Mémoire sans me détourner des occupations instantes dont je me trouve chargé. Toutes les personnes présentes à la séance ont entendu avec le plus grand intérêt l'annonce de votre Mémoire. La difficulté du sujet, la célébrité des auteurs qui l'ont traité et votre nom ne pouvaient manquer d'exciter l'attention. Nous nous en sommes entretenus avec plusieurs personnes à l'Académie et chez M. de Laplace. Je vous remercie, Mademoiselle, des nouvelles marques d'intérêt que vous me donnez en vous occupant de ma santé et de mes travaux. C'est une obligation fâcheuse

que celle des discours publics, et les personnes dont j'estime le plus les suffrages sont celles que je crains le plus d'avoir pour auditeurs.

» J'aurais préféré de vous rendre compte de vive voix au sujet de la présentation de votre Mémoire, et je profiterai d'une autre occasion pour vous en parler. Je suis présentement retenu par des occupations beaucoup moins agréables.

» Agréez, Mademoiselle, avec l'hommage de mes remercîments, celui de mon respect.

» J[h] Fourier.

Vendredi matin [12 *mars* 1824].

» *P.-S.* — Le procès-verbal que j'ai rédigé contient la mention de la lecture de votre Mémoire, et la lettre, par laquelle je vous informe des noms des commissaires, ne vous est point encore parvenue, parce qu'on n'a coutume de les expédier qu'après que le procès-verbal a été lu et adopté (1). »

J[h].

---

(1) L'original de cette Lettre se trouve à la Bibliothèque nationale, dans le Manuscrit français 9118 (*voir* p. 202 du Tome II de l'*Inventaire général et méthodique des Manuscrits français de la Bibliothèque nationale*, par Léopold Delisle, Paris, H. Champion, 1876-1878; 2 vol. in-8°). Elle a été publiée par M. H. Stupuy dans l'Ouvrage intitulé *OEuvres philosophiques de Sophie Germain, suivies de pensées et de Lettres inédites, et précédées d'une Notice sur sa vie et ses œuvres*. Paris, Paul Ritti, 1879; in-18.

La Lettre de Fourier porte seulement l'indication *vendredi matin;* mais sa date est aisément précisée par le simple rapprochement des faits qu'elle concerne.

Voici la Lettre dont il est question dans ce *P.-S.;* au lieu de *Lundi* 8 *mars*, elle indique, par erreur, *Lundi* 9 *mars*.

INSTITUT DE FRANCE. — ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Paris, le 15 mars 1824.

Le Secrétaire perpétuel de l'Académie à Mademoiselle Sophie Germain.

« Mademoiselle,

» L'Académie a reçu l'Ouvrage que vous avez bien voulu lui adresser et qui est intitulé : *Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques*. J'ai l'honneur de vous prévenir que ce Mémoire a été lu dans la séance du lundi 9 mars, et qu'il a été renvoyé à l'examen d'une Commission composée de MM. de Laplace, de

La séance dont parle Fourier est celle du 8 mars 1824; on lit dans le procès-verbal :

« M[lle] Sophie Germain, auteur de recherches analytiques et expérimentales sur les vibrations des surfaces sonores, adresse un Mémoire manuscrit concernant les effets dus à l'épaisseur plus ou moins grande des plaques élastiques.

» L'examen de cet Ouvrage est renvoyé à une Commission composée de MM. de Laplace, de Prony et Poisson. »

Puis, dans la séance du 22 mars suivant, M. de Lacépède est désigné pour faire partie de cette Commission.

Aux Archives de l'Institut, il ne se trouve d'ailleurs aucune trace de ce Mémoire (¹).

M. Lefort, inspecteur général des Ponts et Chaussées, nous ayant obligeamment signalé les papiers de Prony comme étant conservés à l'École des Ponts et Chaussées, M. Léon Lalanne, directeur de l'École, voulut bien nous autoriser, de la manière la plus libérale, à examiner cette précieuse collection (²).

Prony et Poisson. Je m'empresserai de mettre à votre disposition le Rapport que l'Académie aura adopté.

» Agréez, Mademoiselle, l'expression de mon respect.

» B[on] FOURIER. »

(Bibl. nationale, Mss. fr. 9118.)

(¹) Qu'il nous soit permis d'adresser ici nos remercîments à M. Ludovic Lalanne, le très aimable et très érudit bibliothécaire de l'Institut, qui nous a mis sur la voie de ces recherches; elles ont été faites aux archives de l'Institut par M. E. Maindron, avec la plus entière complaisance.

(²) Les papiers de Prony, ainsi que la majeure partie de ses Livres, ont été donnés, en 1839, à l'École des Ponts et Chaussées, par M[me] de Corancez, sa nièce. Ils ont été classés dans un ordre parfait par les soins de M. Schwebelé, l'habile bibliothécaire de l'École.

La bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées est remarquable par le nombre et l'importance de ses Ouvrages scientifiques et techniques, parmi lesquels on peut citer une collection rare des œuvres des hydrauliciens italiens, formée par Prony pendant ses missions en Italie. Cette belle bibliothèque doit à la sollicitude de l'éminent directeur de l'École d'avoir été considérablement enrichie, surtout par l'acquisition des princi-

Nous y avons retrouvé le Mémoire de Sophie Germain, que Prony avait conservé. C'est un manuscrit autographe, de 52 pages in-folio, intitulé *Mémoire sur l'emploi de l'épaisseur dans la théorie des surfaces élastiques*. Le nom de l'auteur n'y figure pas; sur la couverture sont inscrits les noms de MM. de Laplace, de Prony et Poisson, et, au-dessous, la date du 8 mars 1824. En regard de son nom, Poisson a écrit, au crayon, le mot *Vu* (1).

Les géomètres accueilleront certainement avec intérêt cette œuvre de Sophie Germain; par cette publication (2), qui vient compléter la

---

pales publications scientifiques faites à l'étranger. Le *Catalogue*, très soigneusement rédigé, *des Livres composant la bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées* a été publié en 1872 (Paris, Imprimerie nationale, 1 vol. in-8°).

(1) Manuscrit 715 du fonds Prony.

Le même fonds contient, en outre, les Ouvrages suivants de Sophie Germain :

1° Un exemplaire des *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, avec des annotations de la main de Prony (p. 5 et 7). A cet exemplaire sont jointes deux Notes autographes de Sophie Germain : l'une, de 2 pages in-folio, intitulée *Équations de la surface cylindrique vibrante et de l'anneau circulaire* (p. 19), concerne le § III des *Recherches*; l'autre, de 3 pages in-folio, et simplement intitulée *Note*, combat l'hypothèse des forces répulsives formulée par Poisson dans son *Mémoire sur les surfaces élastiques* (*Mémoires de l'Institut*, année 1812, IIe Partie, p. 167). C'est à ces écrits que se rapporte vraisemblablement le passage suivant d'une Lettre de Fourier à Sophie Germain :

« J'ai l'honneur de présenter mes respects à Mlle Germain, en lui transmettant une Note qui m'a été remise par M. de Prony. Je ne connais point l'objet des remarques contenues dans cette Note. Peut-être donneront-elles lieu à quelques éclaircissements que Mlle Germain désirera faire parvenir à M. de Prony. C'est dans cette vue que je les lui adresse... »

[Bibl. nationale, Mss. nouv. 4073 (Libri). — Ch. Henry, *Rev. phil. de Th. Ribot*, déc. 1879.]

2° Un exemplaire des *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques*.

3° Un exemplaire du *Mémoire sur la courbure des surfaces*, par Mlle Sophie Germain (extrait du *Journal de Crelle*, Band 7, Heft 1). Berlin, 1830; in-4°.

Chacun de ces trois exemplaires porte l'envoi autographe : « *A M. de Prony, de la part de l'auteur.* »

(2) Nous avons cru devoir accompagner le Mémoire de Sophie Germain de quelques notes et d'indications bibliographiques.

série de ses mémorables travaux sur les vibrations des corps sonores, nous avons voulu contribuer à honorer la mémoire de « cette personne aussi modeste qu'éminente » [1] que Prony a surnommée l'Hypatia du XIXe siècle [2].

George de Courcel.

P. S. — Au moment de faire paraître ce Mémoire de Sophie Germain, nous apprenons que M. Varroy, Ministre des Travaux publics, vient d'ordonner la remise du manuscrit original aux Archives de l'Institut.

G. C.

(Juillet 1880).

---

(1) *Voir* le savant et consciencieux *Historique abrégé des recherches sur la résistance et sur l'élasticité des corps solides*, placé par M. de Saint-Venant en tête de sa belle édition du *Résumé des Leçons données à l'École des Ponts et Chaussées sur l'application de la Mécanique*, par Navier. Paris, Dunod, 1864; in-8°.

(2) *Voir* l'article consacré à Mlle Sophie Germain dans le Tome V (Supplément) de la *Biographie universelle et portative des contemporains*. Paris, 1834; in-8°.

MÉMOIRE SUR L'EMPLOI DE L'ÉPAISSEUR

DANS LA

THÉORIE DES SURFACES ÉLASTIQUES,

PAR MLLE SOPHIE GERMAIN.

L'influence de l'étendue plus ou moins grande des surfaces élastiques est parfaitement déterminée; mais les opinions se partagent à l'égard des effets produits par les différences de leur épaisseur. Si on se borne, comme on l'a fait jusqu'à présent, à considérer le cas où l'épaisseur est supposée constante, il s'agit de savoir quelle puissance de cette dimension doit entrer comme facteur dans un certain coefficient, dont un autre facteur dépend de l'élasticité naturelle des surfaces. La marche du calcul n'exige pas absolument alors qu'on connaisse la valeur propre de chacun des facteurs, et c'est probablement à la facilité d'éluder leur séparation qu'il faut attribuer le peu d'importance que les géomètres semblent avoir mis à établir quel exposant il convient de donner à l'épaisseur. Quoi qu'il en soit, la théorie des surfaces élastiques renferme essentiellement celle des effets dus à leur épaisseur; et la connaissance de ces effets devient même indispensable lorsqu'on cesse de supposer l'épaisseur égale dans tous les points de la surface

Je me propose aujourd'hui d'examiner et de résoudre cette question.

Après avoir présenté quelques considérations générales sur l'emploi de l'épaisseur, discuté l'opinion des auteurs et rappelé les idées théoriques

que j'ai déjà publiées, idées qui m'ont conduite au choix d'un exposant différent de ceux qui avaient été adoptés, je prouverai que, par rapport au cas où l'épaisseur est supposée constante, mon exposant fournit la juste mesure des phénomènes.

Envisageant ensuite la question sous un point de vue plus étendu, je chercherai, dans la supposition d'une épaisseur variable, quel doit être l'exposant de cette dimension, non plus seulement pour que les formules représentent, dans leur quantité, les effets dus aux changements possibles de la dimension, mais encore pour que la nature même de ces effets puisse être exprimée par l'analyse. J'arriverai enfin à ce résultat, que le cas d'une épaisseur constante est le seul où l'inconvénient d'un choix différent se réduise à induire en erreur sur la mesure des phénomènes; mais que dans le cas plus général où on supposerait l'épaisseur variant en raison des distances de chacun des points de la surface aux extrémités, alors l'emploi de tout autre exposant mettrait la théorie dans une telle contradiction, que la première exprimerait l'impossibilité des phénomènes observés.

---

1. Lorsqu'on suppose l'épaisseur constante, son introduction dans le calcul n'entraîne aucune difficulté de plus, par rapport aux surfaces élastiques, que par rapport aux simples lames; rien n'empêche donc de choisir ici le cas linéaire pour exemple; il en résultera même ce double avantage, d'éviter la complication des formules et d'avoir sous les yeux l'objet direct des Mémoires qui ont précédé ces derniers temps.

Le coefficient du second terme de l'équation différentielle de la lame élastique est une quantité constante; sa valeur dépend nécessairement du choix de la matière dont se composent les pièces auxquelles on l'applique.

On a coutume de prendre une des extrémités pour origine; l'ordonnée x représente alors la distance à cette extrémité. L'intégrale, quelle que soit sa forme, donne les valeurs de z pour chacun des points de la lame; ces valeurs sont exprimées par une fonction de x. L étant la longueur totale de la lame, les valeurs absolues de x, et par conséquent aussi les valeurs de z, dépendent évidemment de celles de L, dont les premières sont de simples fractions; il s'ensuit que dans la

fonction qui exprime les valeurs de z on doit écrire $\frac{x}{L}$. Il n'est pas moins évident que les mêmes valeurs de z dépendent aussi de l'épaisseur e qu'on attribue à la lame élastique; t étant un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire, on peut donc écrire $\frac{e^t x}{L}$ dans l'intégrale.

En supposant toujours l'épaisseur constante, la fonction quatrième de l'intégrale, prise par rapport à x et divisée par dx^4, se trouve multipliée par e^{4t}; il devient indifférent alors d'écrire $\frac{e^t x}{L}$ ou $\frac{x}{L}$ dans l'intégrale, pourvu que, dans ce dernier cas, le coefficient constant du terme $\frac{d^4 z}{dx^4}$ ait la puissance $(4t)^{\text{ième}}$ de l'épaisseur pour facteur; ce facteur se trouvant ainsi confondu avec celui qui dépend de l'élasticité naturelle de la lame, le coefficient constant en exprime l'élasticité absolue. La question a toujours été présentée sous ce dernier point de vue.

Euler a tenté plusieurs fois de déterminer la valeur de l'élasticité absolue. On trouve à la fin du Traité *de maximis minimisve* (¹) un Chapitre consacré à la recherche de la courbe élastique (²). L'auteur, après avoir parlé dans un paragraphe précédent de la force des colonnes, cherche, dans le § 40, quels sont les facteurs qui doivent composer la valeur de l'élasticité absolue de la lame élastique. Le premier dépend du choix de la matière, ou, ce qui est la même chose, de l'élasticité naturelle de la pièce; le second est comme sa largeur, et le troisième est le carré de son épaisseur.

On a lieu de s'étonner de ce que cet illustre auteur a cru devoir faire entrer ici la largeur de la lame en considération; peut-être expliquera-t-on cette singularité en pensant que, dans une matière encore nouvelle, on n'avait pas suffisamment distingué le cas des colonnes de celui des simples lames.

(¹) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Auctore Leonhardo Eulero. Lausannæ et Genevæ, MDCCXLIV; in-4°.

(²) *Additamentum I : De curvis elasticis*, p. 245 de l'Ouvrage précité.

Dans le Mémoire sur la force des colonnes (Berlin, 1757) (¹), Euler paraît être fort indécis à l'égard du choix de la puissance de l'épaisseur qu'il convient de faire entrer dans l'expression du moment de roideur; car il termine ainsi le § V consacré à cette recherche :

« Pour celle-ci (la largeur) il est assez évident que ce moment (de la roideur) lui est proportionnel; mais pour l'épaisseur, puisqu'elle s'oppose davantage à l'inflexion, il semble que le moment de la roideur en suive la raison *doublée* ou même *triplée;* d'où l'on pourrait conclure que, si la colonne est un cylindre, son moment de roideur sera proportionnel au *cube* ou peut-être au *carré-carré* du diamètre de la base. »

Plus loin, § LIII du même Mémoire, on lit le passage suivant :

« .... la matière étant la même, tant la théorie que quelques expériences faites sur la roideur des corps, nous assurent que le moment de la roideur en chaque endroit est assez exactement proportionnel au *carré-carré du diamètre de l'épaisseur,* ou au carré de la section faite au même endroit. »

La force des colonnes n'est pas l'objet direct des recherches que je me suis proposées; cependant je ne puis me dispenser de faire remarquer qu'il faut distinguer deux cas essentiellement différents, selon que la colonne est dans une position verticale ou horizontale. Par rapport au premier, l'effort est égal suivant la direction de chacun des diamètres; il n'y a donc aucune raison de croire que l'épaisseur s'oppose plus à l'inflexion que la largeur. Le second est le seul qui présente de l'analogie avec la question des lames élastiques; mais, si l'on admet, t étant un nombre quelconque, que le moment de la roideur soit proportionnel à la puissance $t^{\text{ième}}$ du diamètre, je ne vois pas comment on en conclurait que le même moment doive être proportionnel à la puissance $(t-1)^{\text{ième}}$ de l'épaisseur proprement dite. En effet, puisqu'il s'agit ici d'un cylindre dont un des diamètres représente la largeur, tandis que le diamètre perpendiculaire au premier est pris pour l'épaisseur, on voit que les différentes parties de la largeur correspondent à des épaisseurs

---

(¹) *Sur la force des colonnes,* par M. Euler, p. 252 de l'*Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, année MDCCLVII. Berlin, 1759; in-4°.

différentes. Les tranches d'égale largeur dans lesquelles on peut concevoir que la colonne soit divisée ne peuvent donc être douées de forces égales; cependant cette condition semble nécessaire pour que, en regardant la force due à l'épaisseur comme proportionnelle à la puissance $(t-1)^{\text{ième}}$ du diamètre, la force totale de la colonne soit proportionnelle à la puissance $t^{\text{ième}}$ du même diamètre.

Quoi qu'il en soit, la seule conclusion qu'on puisse tirer des passages que je viens de rapporter est que l'auteur n'était pas encore parvenu à fixer son opinion sur la question qui nous occupe.

En suivant l'ordre des dates, j'ai consulté le Mémoire de Lagrange sur les ressorts pliés (Berlin, 1769) ([1]). L'auteur emploie le coefficient dépendant de l'élasticité absolue de la lame, sans s'arrêter à l'examen des facteurs qui le composent (*voir* § II); plus loin, § VI, il renvoie, à la vérité, au Mémoire d'Euler dont nous venons de parler; mais cette citation est entièrement étrangère à la question des facteurs qui entrent dans la valeur de l'élasticité absolue.

La *Mécanique analytique* ([2]) ne contient non plus aucune détermination à cet égard.

Euler est encore revenu sur le même sujet dans le beau Mémoire où il examine les différents cas de vibration dont la lame élastique est susceptible (*Acta*. P. 1779) ([3]). On peut voir (p. 107, § IV) que l'auteur y regarde l'élasticité de la lame comme proportionnelle au carré de son épaisseur. Par une singularité remarquable, cette dimension y est représentée, comme dans la suite du Mémoire, par la double lettre *cc*. Si l'on rapproche cette notation de l'expression *carré-carré du diamètre de l'épaisseur*, employée par le même auteur dans un des passages qu'on vient de lire, on sera porté à croire que le mot *épaisseur* n'a pas toujours désigné, dans ses recherches, une quantité linéaire.

On trouve, dans le Recueil des Mémoires de la Société italienne pour

---

([1]) *Sur la force des ressorts pliés*, par M. de la Grange, p. 167 de l'*Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres*, année MDCCLXIX. Berlin, 1771; in-4°.

([2]) *Mécanique analytique*, par J.-L. Lagrange. Nouvelle édition, revue et augmentée par l'auteur. Paris, Mme Ve Courcier, 1811-1815; 2 vol. in-4°.

([3]) *Investigatio motuum, quibus laminæ et virgæ elasticæ contremiscunt*, auctore L. Eulero, p. 103 de *Acta Academiæ Scientiarum imperialis Petropolitanæ pro anno MDCCLXXIX*. Pars prior, Petropoli, 1782; in-4°.

l'année 1782, un mémoire de Giordano Ricati, intitulé *Delle vibrazioni sonore dei cilindri* (¹); l'auteur, en comparant entre eux deux cylindres différents, établit la proportion directe de leur longueur et inverse de leur rigidité naturelle multipliée par le carré de leur diamètre. Ce Mémoire semble avoir été inspiré par la lecture de celui d'Euler, dont il développe toutes les conséquences avec une exactitude scrupuleuse; cependant la proportion dont on vient de parler ne serait pas d'accord avec le sens d'Euler si on regardait l'épaisseur *cc* comme une quantité linéaire.

M. Chladni, dans son Traité d'Acoustique (²) (p. 99, § 75) a cru se conformer au véritable sens d'Euler en adoptant, pour les formules qui expriment les sons, les conséquences de la supposition de la proportionnalité de l'élasticité absolue au carré de l'épaisseur de la lame élastique.

J'avais d'abord admis moi-même cette supposition; elle m'avait paru conforme à l'opinion d'Euler, et je pensais alors que l'assentiment général l'avait confirmée.

Dans le § 22 de son Mémoire sur les surfaces élastiques (³), M. Poisson a soin de remarquer que le coefficient n^2, qui n'est autre chose que la quantité nommée précédemment *élasticité absolue*, est proportionnelle à l'épaisseur de la surface. Une telle détermination de l'exposant dont il est question résulte en effet des suppositions admises par cet habile géomètre.

Dans la suite, lorsque j'ai cherché à démontrer l'hypothèse qui, pour la première fois, a conduit à trouver l'équation des surfaces élastiques (⁴), j'ai reconnu, comme je le dirai plus bas, que ce n'est ni la première ni la seconde, mais plutôt la quatrième puissance de l'épaisseur, qui doit entrer dans la valeur du coefficient constant.

(¹) *Delle vibrazioni sonore dei cilindri* del sig. conte Giordano Riccati, p. 444 de *Memorie di Matematica e Fisica della Società italiana*. Tomo I. Verona, MDCCLXXXII; pet. in-fol.

(²) *Traité d'Acoustique*, par E.-F.-F. Chladni. Paris, chez Courcier, 1809; in-8°.

(³) *Mémoire sur les surfaces élastiques*, par M. Poisson, p. 167 des *Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, année 1812, IIe Partie. Paris, F. Didot, MDCCCXVI; in-4°.

(⁴) *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, par Mlle Sophie Germain. Paris, Mme Ve Courcier, 1821; in-4°.

Vers la même époque, M. Navier choisissait, dans son Mémoire sur la flexion des plans élastiques (1), la troisième puissance de l'épaisseur. Les *Bulletins de la Société philomathique* (livraisons de juin et juillet 1823) contiennent l'extrait d'un Mémoire de ce savant auteur sur le même sujet (2); il y persiste dans le choix de la puissance troisième. L'extrait est terminé par l'observation suivante :

« Les personnes qui se sont occupées de cette matière ne s'accordent pas toutes sur la puissance de l'épaisseur qui entre comme facteur dans le dernier terme de l'équation différentielle. Mais le résultat obtenu ici est conforme à ceux qui ont été admis par Euler et Lagrange dans leurs recherches sur la flexion des lames élastiques et des colonnes, etc. »

---

(1) *Mémoire sur la flexion des plans élastiques.*

Ce Mémoire, lu par Navier à l'Académie des Sciences, dans la séance du lundi 14 août 1820, fut renvoyé à l'examen d'une Commission composée de MM. de Prony, Poisson, Fourier, Cauchy. Navier y ajouta ensuite une Note explicative, manuscrite, qu'il remit, quelques mois après, aux commissaires.

Le Mémoire de Navier n'a été l'objet d'aucun Rapport.

Navier distribua quelques copies lithographiées de son Mémoire; Fourier en reçut un exemplaire et en donna connaissance à Mlle Sophie Germain, ainsi que le montre la Lettre suivante :

« Mardi soir [15 *août* 1820].

» J'ai l'honneur d'adresser à Mlle Germain le dernier numéro des *Annales de Physique* où se trouve le Mémoire de M. Savart sur les vibrations des lames élastiques (1). J'ai pensé que la lecture de cet écrit pourrait l'intéresser. J'espère lui envoyer demain un Mémoire qui est présenté à l'Académie par M. Navier, et qui a pour objet l'analyse des flexions des plans élastiques. L'auteur a fait copier ce manuscrit par les presses lithographiques et m'en a remis un exemplaire.

» Je prie Mlle Germain d'agréer l'hommage de mon respect et de vouloir bien l'offrir de ma part à madame sa mère. » FOURIER (2). »

(2) *Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques; par M. Navier*, p. 92 du *Bulletin des Sciences*, par la Société philomathique de Paris. Année 1823. Paris, in-4°.

(1) Mémoire sur la Communication des mouvements vibratoires entre les corps solides, par M. Felix Savart, docteur en Médecine, etc. (Lu à l'Académie des Sciences le 15 novembre 1819); page 113 des *Annales de Chimie et de Physique*, par MM. Gay-Lussac et Arago (2e série), t. XIV, 1820, in-8°.

(2) L'original de cette Lettre se trouve à la Bibliothèque nationale, dans le Manuscrit français nouveau 4073 (Libri). Elle a été publiée par M. C. Henry dans le numéro de décembre 1879 de la *Revue philosophique* dirigée par Th. Ribot.

Ainsi la première, la seconde, la troisième et enfin la quatrième puissance de l'épaisseur ont été successivement proposées comme facteur de l'élasticité absolue des surfaces.

Il résulte de l'examen auquel nous venons de nous livrer qu'il n'existe encore aucune doctrine solidement établie relativement à l'influence de l'épaisseur sur les phénomènes qui appartiennent aux surfaces élastiques; si je ne me fais illusion, celle que je vais exposer sera désormais à l'abri de toute objection.

2. En appliquant au cas des surfaces les principes émis par Jacques Bernoulli à l'égard des lames élastiques, j'ai eu occasion de remarquer que le carré de leur épaisseur entre dans l'expression de la puissance qui détermine leur changement de figure. J'ai vu en même temps que la force élastique, qui a pour mesure le même changement de figure qu'elle tend à détruire, introduit nécessairement aussi le carré de l'épaisseur dans l'équation différentielle. J'en ai conclu que les termes qui expriment l'action de la force élastique doivent, dans le cas où l'épaisseur est supposée constante, être multipliés par la quatrième puissance de la même dimension.

Cette remarque a été développée dans le § 8 de mon Mémoire sur la théorie des surfaces élastiques [1]; je me contenterai de rappeler ici le procédé qui introduit le carré de l'épaisseur dans l'expression du changement de figure de la lame élastique.

Un tel changement ne peut s'effectuer sans qu'il en résulte à la fois une dilatation et une contraction dans les forces opposées de chacun des éléments de la lame. Ces deux effets sont égaux entre eux, et ils peuvent également fournir la mesure de la force qui les a produits.

Pour plus de simplicité, bornons-nous à considérer l'effet de la dilatation d'une lame droite.

L'épaisseur et la longueur de l'élément de cette lame sont les côtés du parallélogramme que présente sa figure naturelle. La lame a acquis un certain degré de courbure, lorsque, par l'action d'une force quelconque, l'élément a été dilaté dans sa partie supérieure; les deux rayons de courbure qui appartiennent aux extrémités de l'élément se

[1] *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, § 8, p. 13.

rencontrent alors, et l'angle qu'ils comprennent appartient au triangle dont les mêmes rayons et la longueur de l'élément dilaté sont les côtés. En même temps, l'un des rayons de courbure, pénétrant dans l'épaisseur de la lame, coupe, au milieu de cette épaisseur, la ligne qui lui sert de mesure; il en résulte un second triangle, semblable au premier; deux de ses côtés sont la demi-épaisseur et la quantité linéaire dont la partie supérieure de l'élément a été dilatée. On conclut, de la proportion établie entre les côtés des triangles semblables, que la valeur de la quantité linéaire dont on vient de parler a la demi-épaisseur pour facteur.

Nous avons dit que l'action de la force qui a déterminé le changement de figure de la lame est proportionnelle à la dilatation qu'a éprouvée la partie supérieure de l'élément de cette lame. Il est évident que cette dilatation elle-même est représentée par la surface du petit triangle compris dans la demi-épaisseur de la lame. Pour avoir cette surface, il faut multiplier celui des côtés du triangle qui, suivant ce qu'on vient de voir, a la demi-épaisseur pour facteur, par le second côté du même triangle, qui n'est autre chose que la demi-épaisseur elle-même : la surface du triangle et par conséquent aussi la dilatation de la lame sont donc proportionnelles au carré de l'épaisseur de cette lame.

Pour arriver à conclure que l'action de la force d'élasticité est proportionnelle à la quatrième puissance de l'épaisseur de la lame élastique, il suffit à présent de rappeler que la force d'élasticité est proportionnelle à l'effet qu'elle tend à produire, c'est-à-dire à la dilatation de l'élément de la lame qu'elle tend à ramener à sa figure naturelle, et que son action a pour mesure le produit de la force elle-même par la quantité sur laquelle elle agit.

Ce qu'on vient de dire relativement à la mesure de l'action des forces d'élasticité est indépendant de la supposition particulière d'une épaisseur constante; car cette mesure appartient à chacun des éléments de la lame considérés isolément; seulement, lorsque l'épaisseur varie d'un point à l'autre des surfaces, elle ne doit plus fournir de facteur au coefficient constant qui multiplie les termes de l'équation différentielle relatifs à l'action de la force élastique.

3. Le cas d'une épaisseur constante est le seul dont on se soit

occupé jusqu'à présent; après avoir montré quelles sont, dans cette supposition, les conséquences du choix de l'exposant, je les comparerai aux données de l'expérience.

Selon qu'on fait entrer les puissances première, seconde, troisième ou quatrième de l'épaisseur dans le coefficient n^2 des termes $\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4}$ de l'équation des plaques élastiques, on trouve que les sons doivent être en raison directe des puissances $\left(\frac{1}{2}\right)^{\text{ième}}$, première, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\text{ième}}$ ou seconde de la même épaisseur. En général, e représentant la valeur de cette dimension par rapport à la surface, si e^{4t} est facteur de n^2, les sons seront proportionnels à e^{2t}; on sait d'ailleurs, en prenant pour exemple la plaque carrée dont le côté est L, que les mêmes sons doivent être proportionnels à $\frac{1}{L^2}$: l'expérience peut donc nous faire connaître quelle est la valeur de t dans la formule $\frac{e^{2t}}{L^2}$.

La manière la plus simple de procéder est de comparer des pièces qui, différentes par leur épaisseur, sont, sous tout autre rapport, semblables entre elles. Il est facile de remplir cette condition à l'égard de la forme et de l'étendue des surfaces; mais on a toujours à craindre l'influence des différences d'élasticité naturelle de la matière employée.

Dans la vue d'écarter, autant que possible, cette cause d'erreur, j'ai voulu que les plaques comparées fussent coupées dans un même morceau de verre, mais à des distances assez grandes pour que l'épaisseur, quoique sensiblement égale dans l'étendue de chacune des surfaces, fût pourtant notablement différente de l'une à l'autre.

J'ai successivement employé plusieurs moyens pour mesurer ces épaisseurs. J'avais d'abord eu recours à l'application, sur la tranche des surfaces, d'un tissu dont je comptais les fils, et j'avais déjà obtenu des résultats favorables à la théorie que je veux établir; cependant, malgré la précaution que j'avais prise de répéter les mêmes opérations et de varier les tissus dont je me servais, j'ai craint que le plus ou le moins de tension dont ils étaient susceptibles ne pût occasionner quelque erreur dans des mesures aussi délicates.

Afin d'obtenir une exactitude plus grande, j'ai fait exécuter en cuivre des rapporteurs de 1°, 2°, ... et 10°. Lorsque les épaisseurs de

deux surfaces étaient exactement recouvertes par les cordes de deux angles appartenant au même rayon, j'obtenais immédiatement le rapport cherché. Je le vérifiais ensuite en appliquant, sur les mêmes épaisseurs, les cordes d'un même angle dont le rayon variait en raison des différences de ces épaisseurs. Les rayons étaient mesurés en millimètres et présentaient une sorte de multiplication des différences qu'ils servaient à faire reconnaître. Ce dernier moyen a été employé seul dans les cas où les épaisseurs étaient peu différentes; mais je me suis alors servi successivement de différents angles, de manière qu'il ne me restât plus aucun doute sur l'exactitude des mesures que je soumettais au calcul.

J'ai fait un assez grand nombre d'épreuves; comme elles ont toutes fourni des résultats analogues, je me contenterai d'en rapporter quelques-unes.

Nous avons vu plus haut que le son est proportionnel à la quantité $\frac{e^{2t}}{L^2}$; par conséquent, si l'on compare deux pièces égales d'ailleurs, dont les épaisseurs soient représentées par e et e', la formule $\left(\frac{e}{e'}\right)^{2t}$ exprimera la différence des sons correspondant, dans chacune d'elles, aux mêmes cas de vibration. Suivant la théorie que je cherche à établir, il faut prendre $t = 1$; il s'agit donc de vérifier la formule $\left(\frac{e}{e'}\right)^{2t}$.

Deux pièces pour lesquelles on avait $e : e' :: 7 : 6$, et par conséquent $\left(\frac{e}{e'}\right)^2 = \frac{49}{36}$, ont donné l'intervalle d'*ut* à *fa* égal à $\frac{4}{3}$. La différence entre $\frac{49}{36}$ et $\frac{4}{3}$ est $\frac{49}{48}$, quantité inappréciable.

Deux autres pièces pour lesquelles on avait $e : e' :: 6 : 5$, et par conséquent $\left(\frac{e}{e'}\right)^2 = \frac{36}{25}$, ont donné l'intervalle de *mi* à *si*♭, qui ne diffère de $\frac{36}{25}$ que de la distance entre un demi-ton majeur et un demi-ton mineur.

Cinq pièces de même forme et de même grandeur, taillées dans le même morceau de verre, ont donné, toujours pour le même cas de vibration, les sons suivants : *ut*, *ut**, *fa*, *fa** et *sol**. Dans la première et la dernière, on ne reconnaissait pas la moindre différence d'épaisseur

entre les différents points du contour. On avait, pour ces deux pièces, $e : e' :: 5 : 4$, et par conséquent $\left(\frac{e}{e'}\right)^2 = \frac{25}{16}$. L'intervalle d'*ut* à *sol** est, en effet, très exactement représenté par la fraction $\frac{25}{16}$.

A l'égard des autres pièces, l'épaisseur était moyenne entre celles dont on vient de parler, et elle n'était pas la même pour leurs différents côtés. C'est ce qui explique, comme nous le verrons plus bas, la différence observée entre les sons.

Les expériences dont on vient de rendre compte prouvent évidemment, ainsi que je l'ai supposé, qu'on doit prendre $t = 1$ dans la formule $\left(\frac{e}{e'}\right)^{2t}$.

On peut encore soumettre la théorie à un autre genre d'épreuve : on peut comparer les sons de deux pièces de même forme dont à la fois la grandeur et l'épaisseur soient différentes. En continuant de désigner les deux épaisseurs par e et e', et en représentant par L et L' les longueurs des côtés homologues, on aura à vérifier la formule $\left(\frac{e\,L'}{e'\,L}\right)^2$, qui exprime alors l'intervalle entre les sons correspondant aux mêmes cas de vibration des deux surfaces.

Les expériences faites de cette manière ont offert des résultats également satisfaisants; je prendrai pour exemple la plus simple d'entre elles.

S'il s'agit de deux pièces dont l'épaisseur et la grandeur des côtés homologues soient proportionnelles, par exemple si l'une d'elles est en même temps deux fois plus épaisse et deux fois plus longue que l'autre, la formule $\left(\frac{e\,L'}{e'\,L}\right)^2$ deviendra $\left(\frac{e\,2\,L}{2\,e\,L}\right)^2$; par conséquent elle se réduira à l'unité; or l'unité représente l'unisson : les deux pièces devront donc, dans les mêmes cas de vibration, faire entendre les mêmes sons.

L'impossibilité de tirer d'un même morceau de verre deux surfaces de même étendue dont les épaisseurs différassent dans la proportion de 1 à 2 m'a forcée d'avoir recours à l'emploi de pièces de cuivre. J'ai mis tous mes soins à obtenir, autant que possible, le même degré d'élasticité naturelle.

Deux plaques carrées dont les côtés et les épaisseurs étaient égale-

ment dans le rapport de 2 à 1 ont été comparées, et, pour les différents cas de vibration dont les pièces étaient susceptibles, on a en effet toujours obtenu l'unisson.

Peut-être me serait-il permis de regarder déjà comme suffisamment justifié le choix de l'exposant que j'ai adopté. Les paragraphes suivants seront consacrés à l'examen du cas plus général où l'épaisseur est supposée varier d'un point à l'autre de la surface élastique; j'aurai occasion de faire remarquer qu'il en résulte une nouvelle confirmation de la théorie qui vient d'être exposée.

4. Afin d'arriver à connaître les effets de la variabilité de l'épaisseur, nous choisirons d'abord pour exemple le cas où l'épaisseur d'une lame droite, différente à ses deux extrémités, varie d'un point à l'autre en raison des distances aux mêmes extrémités. Nous commencerons par déterminer, dans cette supposition, l'épaisseur pour chacun des points de la lame et les épaisseurs moyennes des différentes parties comprises entre les mêmes points. Après avoir introduit ces quantités dans les formules, nous comparerons leurs résultats à ceux le l'expérience.

Des opérations du même genre, mais nécessairement beaucoup plus compliquées, nous feront connaître, dans des suppositions analogues, l'épaisseur pour chacun des points d'une plaque carrée et les épaisseurs moyennes des parties comprises entre les mêmes points. Les formules qui en résulteront seront également comparées à l'expérience. Si l'on supposait toute autre forme à la surface inégalement épaisse, on parviendrait sans doute à connaître et l'épaisseur dans chacun de ses points et l'épaisseur moyenne des espaces circonscrits, pris sur la même surface ; mais on se trouverait alors forcé de faire entrer en considération un plus grand nombre de conditions, dépendantes toutes des distances aux points dont les épaisseurs seraient regardées comme données; il en résulterait une multiplicité de formules qui rendrait peut-être la théorie plus difficile à saisir. Les deux exemples auxquels j'ai cru devoir me borner sont certainement les plus simples qu'on puisse choisir; ils m'ont paru suffisants pour mettre la question dans tout son jour et pour faire pressentir les applications dont elle est susceptible.

5. Représentons par m et n les épaisseurs aux deux extrémités d'une lame droite dont la longueur est L; prenons pour origine le point auquel appartient l'épaisseur m, et supposons que l'épaisseur, dans tous les points dont se compose la lame, dépende uniquement de leurs distances à chacune des extrémités, en sorte que ces épaisseurs soient proportionnelles aux mêmes distances.

Les différentes valeurs que l'ordonnée s peut recevoir expriment les distances à l'origine des points auxquels elles appartiennent. Soient s et s' deux de ces valeurs, les formules $\frac{m(\mathrm{L}-s)+ns}{\mathrm{L}}$ et $\frac{m(\mathrm{L}-s')+ns'}{\mathrm{L}}$ donneront les épaisseurs correspondantes. Dans les mêmes suppositions, la formule $\frac{m(2\mathrm{L}-s-s')+n(s+s')}{2\mathrm{L}}$ représentera l'épaisseur moyenne de partie comprise entre les deux points. Ces diverses formules sont évidentes d'elles-mêmes, et les conséquences qu'on en peut tirer ne le sont pas moins.

En effet, si on prend $s=\frac{1}{2}\mathrm{L}$, la première devient $\frac{m+n}{2}$, et telle est réellement, dans les suppositions présentes, l'épaisseur du milieu de la lame. Si on fait dans la dernière $s'=\mathrm{L}-s$, elle représente l'épaisseur moyenne d'une partie, de longueur $\mathrm{L}-2s$, prise à égale distance des deux extrémités de la même lame, et elle se réduit encore à $\frac{m+n}{2}$. Il est facile de voir la raison de cette identité : quelle que soit la distance aux extrémités d'une portion de la lame située au milieu de cette lame, son épaisseur moyenne doit toujours être égale à l'épaisseur moyenne de la lame entière; l'épaisseur dans le point de milieu correspond au cas où on prendrait à la fois $s'=\mathrm{L}-s$ et $s=\frac{1}{2}\mathrm{L}$, et alors la portion dont la formule exprimerait l'épaisseur moyenne se réduirait, comme on le voit, à un seul point.

En prenant $s=0$, la même formule, qui devient $\frac{m(2\mathrm{L}-s)+ns}{2\mathrm{L}}$, donne l'épaisseur moyenne de la portion de la lame comprise entre l'origine et le point auquel l'ordonnée s appartient.

6. Avant d'entrer dans la discussion des effets dus à la variabilité de l'épaisseur, nous pourrions établir, d'après l'expérience, la propo-

sition suivante : *Deux lames élastiques d'ailleurs semblables, dont l'épaisseur moyenne, égale de part et d'autre, est variable dans l'une et constante dans l'autre, donnent l'unisson pour tous les cas de vibration dont elles sont susceptibles*. En remontant plus haut, nous allons voir qu'une lame élastique dont l'épaisseur varierait suivant la loi que nous venons d'établir ne serait susceptible d'aucune vibration régulière, si la variabilité supposée avait sur les sons que cette lame peut rendre une influence propre, c'est-à-dire qui ne dépendît pas uniquement de l'épaisseur moyenne des différentes parties dans lesquelles on peut concevoir que la même lame soit divisée.

L'Analyse montre, comme j'ai eu occasion de le dire ailleurs, que, dans tous les cas de vibration qui appartiennent à la lame élastique, il existe un ou plusieurs points de limite qui permettent de séparer la même lame en plusieurs portions, sans que le son et la figure dont chacune de ces portions sont susceptibles cessent d'être les mêmes que lorsqu'elles faisaient partie de la lame entière.

Cela posé, afin de rendre notre raisonnement plus simple, considérons le cas où il n'y aurait, sur la lame d'épaisseur variable, qu'un seul point de limite analytique, et fixons la position de ce point d'après la supposition que les parties d'inégales épaisseurs qu'il sépare sont équivalentes à des parties de même étendue et d'épaisseurs constantes égales aux épaisseurs moyennes des mêmes parties. En admettant ensuite que l'inégalité d'épaisseur entre les divers points de la lame détermine le déplacement du point de limite, nous arriverons à ce résultat contradictoire que, entre deux portions de la même lame assujetties à rendre le même son, la variabilité d'épaisseur exigera d'un côté une diminution et de l'autre une augmentation d'étendue dans les parties vibrantes.

7. Cherchons maintenant quel rôle l'épaisseur considérée comme variable doit jouer dans les formules relatives à la lame élastique. Nous avons remarqué (§ 1) qu'en supposant l'épaisseur constante il est indifférent d'écrire, dans la fonction de x qui donne les valeurs de l'ordonnée z, ou $\frac{e^t x}{L}$, ou simplement $\frac{x}{L}$, pourvu que, dans ce dernier cas, on prenne e^{4t} pour facteur du coefficient constant qui appartient au dernier terme de l'équation différentielle.

Quand l'épaisseur varie d'un point à l'autre, il faut considérer isolément chacun des points de la lame, et la première manière d'envisager la question est la seule qui convienne. z et s étant les coordonnées d'un point donné, on doit multiplier, dans la fonction qui donne la valeur de z, la puissance $t^{\text{ième}}$ de l'épaisseur par la différentielle de s. Suivant les formules données § 5, le produit de cette multiplication est $\left[\frac{m(L-s)-ns}{L}\right]^t ds$.

Si l'on mettait dans l'intégrale, au lieu de $e^t x$, comme lorsqu'il est question d'une lame d'épaisseur constante, la quantité différentielle que nous venons de trouver, alors la fonction qui exprime les valeurs de z ne serait applicable qu'à un seul point; pour étendre cette fonction à tous les points qui composent la lame, on doit donc écrire

$$\int\left[\frac{m(L-s)+ns}{L}\right]^t ds.$$

Nous avons vu (§ 6) que le point de limite qui existe dans tous les cas de vibrations régulières est placé, sur la lame d'épaisseur variable, en raison des épaisseurs moyennes des parties qu'il sépare; la valeur correspondante de l'ordonnée z est donc la même que si la lame était formée de la réunion de deux parties d'épaisseurs constantes, respectivement égales aux épaisseurs moyennes des parties de même longueur, prises sur la lame d'épaisseur variable. Prenons toujours pour exemple le cas où il n'existe qu'un seul point de limite analytique sur la lame vibrante, et ne considérons, pour plus de simplicité, que la partie d'épaisseur variable comprise entre l'origine et le point de limite. L'ordonnée z qui appartient à ce point aura la même valeur que s'il était pris au milieu d'une lame d'épaisseur constante égale à l'épaisseur moyenne de la partie dont il s'agit, et d'une longueur double de celle de cette partie. Une telle compensation entre l'épaisseur variable et l'épaisseur moyenne ne peut avoir lieu pour un des points de la lame sans qu'il existe des compensations semblables par rapport à tous les autres points de la même lame. Et, en effet, quel que soit le point de la lame qu'on veuille considérer, si s représente la distance à l'origine, la valeur correspondante de l'ordonnée z sera égale à celle qui appartiendrait au point semblablement situé sur une lame d'épaisseur constante égale à l'épaisseur moyenne de la partie dont il s'agit.

Il est sans doute inutile de dire que l'épaisseur et la longueur de la lame d'épaisseur constante qui entre ici en comparaison sont différentes relativement à chacune des valeurs de s.

Suivant ce que l'on vient de lire, l'épaisseur moyenne de la partie comprise entre l'origine et le point auquel appartient l'ordonnée s étant $\frac{m(2L-s)+ns}{L}$, on obtiendra les mêmes valeurs de z, soit qu'on écrive, dans l'intégrale, ou $\int\left[\frac{m(L-s)+ns}{L}\right]^t ds$, ou $\left[\frac{m(2L-s)+ns}{2L}\right]^t s$. Par conséquent, ces deux formules doivent être regardées comme deux expressions différentes d'une seule et même quantité. Elles doivent donc satisfaire à l'équation suivante :

$$\int\left[\frac{m(L-s)+ns}{L}\right]^t ds = \left[\frac{m(2L-s)+ns}{2L}\right]^t s.$$

La différentiation donne

$$\begin{aligned}&\left[\frac{m(L-s)+ns}{L}\right]^t ds\\ &\quad = \frac{t(n-m)}{2L}\left[\frac{m(2L-s)+ns}{2L}\right]^{t-1} ds + \left[\frac{m(2L-s)+ns}{2L}\right]^t ds.\end{aligned}$$

Après avoir multiplié par $(2L)^t$ et divisé par ds, cette dernière équation se réduit à

$$\begin{aligned}&\{2[m(L-s)+ns]\}^t\\ &\quad = [m(2L-s)+ns]^{t-1}\{[m(2L-(t+1)s]+n(t+1)s\}.\end{aligned}$$

Si on effectue alors les développements et les réductions convenables, on trouve

$$\left\{\begin{aligned}&(2mL)^t + t(2mL)^{t-1}.2[s(n-m)]\\ &\quad + \frac{t(t-1)}{2}\cdot(2mL)^{t-2}.2^2[s(n-m)]^2\\ &\quad + \frac{t(t-1)(t-2)}{2.3}\cdot(2mL)^{t-3}.2^3.[s(n-m)]^3\\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad + \frac{t(t-1)(t-2)\ldots[t-(V-1)]}{2.3\ldots V}\cdot(2mL)^{t-V}.2^V.[s(n-m)]^V\end{aligned}\right\} = \left\{\begin{aligned}&(2mL)^t + 2.t(2mL)^{t-1}[s(n-m)]\\ &\quad + 3.\frac{t(t-1)}{2}\cdot(2mL)^{t-2}.[s(n-m)]^2\\ &\quad + 4.\frac{t(t-1)(t-2)}{2.3}\cdot(2mL)^{t-3}.[s(n-m)]^3\\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad + (V+1)\frac{t(t-1)(t-2)\ldots[t-(V-1)]}{2.3\ldots V}\cdot(2mL)^{t-V}.[s(n-m)]^V.\end{aligned}\right.$$

Cette équation doit avoir lieu pour toutes les valeurs possibles de l'ordonnée s; chacun des termes du premier membre est donc respectivement égal à celui qui, dans le second, contient la même puissance de cette ordonnée. Prenons pour exemple les $(V+1)^{\text{ièmes}}$ termes des mêmes développements; toutes les fois qu'on ne fera pas $n - m = 0$, c'est-à-dire toutes les fois qu'on ne reviendra pas à supposer l'épaisseur constante, l'équation $2^V = V + 1$ devra être satisfaite. Cette équation ne peut se vérifier que pour deux valeurs de V, savoir zéro et l'unité. Les développements entre lesquels s'établit notre équation ne peuvent donc avoir que deux termes, et, par conséquent, l'unité est la seule valeur qui puisse être attribuée à l'exposant t.

Pour trouver cette valeur de l'exposant, il n'était pas même indispensable d'étendre l'équivalence entre les épaisseurs variables et les épaisseurs moyennes à toutes les parties comprises entre l'origine et chacun des points de la lame vibrante; il aurait pu suffire de remarquer que les développements de l'un et l'autre membre de l'équation ci-dessus sont composés d'un égal nombre de termes, et que chacun ne diffère de son correspondant que par le changement de 2^V en $V + 1$. L'équation $2^V = V + 1$ résulterait alors de l'existence de l'équation entre les mêmes développements pour une seule des valeurs de l'ordonnée s; et, d'après ce que nous avons dit plus haut, cette existence, par rapport aux points de limite analytiques, a été reconnue nécessaire afin que la lame puisse exécuter des mouvements réguliers.

En prenant $t = 1$, on a

$$2[m(L - s) + ns] = m[2L - (1+1)s] + n(1+1)s,$$

équation identique. Ainsi, les conditions nécessaires à l'existence des vibrations régulières de la lame élastique d'épaisseur variable auront lieu d'elles-mêmes, si on attribue à l'exposant de l'épaisseur la valeur que la simple considération de la nature des forces d'élasticité nous a fait connaître d'avance (*voir* § 2).

Chacune des valeurs de z relative à la lame d'épaisseur variable est, suivant ce qu'on vient de lire, égale à la valeur correspondante de la même ordonnée prise par rapport à une lame dont l'épaisseur constante serait représentée par la formule $\frac{m(2L - s) + ns}{2L}$.

Si L′ est la longueur de cette lame fictive, différente pour chacune des valeurs de s, on devra mettre dans l'intégrale, au lieu de $\frac{ex}{L}$, qui se rapporterait au cas où la lame de longueur L aurait une épaisseur constante, la quantité $\left[\frac{m(2L-s)+ns}{2L}\right]\cdot\frac{s}{L'}$, qui lui est, comme on le voit, entièrement analogue.

8. Nous avons déjà eu occasion de faire observer (§ 3), en examinant les conséquences du choix de la puissance de l'épaisseur qui doit entrer comme facteur dans le coefficient du second terme de l'équation de la lame élastique d'épaisseur constante, que, si e^{4t} représente cette puissance et que L soit la longueur de la lame, les sons correspondant aux différents genres de vibrations seront proportionnels à la quantité $\frac{e^{2t}}{L^2}$.

En faisant, comme on le doit, $t=1$, cette quantité devient $\frac{e^2}{L^2}$; ainsi, dans tous les cas de vibration, deux lames dont les épaisseurs e et e', aussi bien que les longueurs respectives L et L′, satisferont à l'équation $\frac{e^2}{L^2}=\frac{e'^2}{L'^2}$, devront faire entendre les mêmes sons.

La proportion $\frac{m+n}{2}:\frac{m(2L-s)+ns}{2L}::L:L'$ exprime, conformément à ce que nous avons déjà établi, que les longueurs de nos lames fictives sont entre elles comme les épaisseurs correspondantes; il en résulte que l'équation $\frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2}{L^2}=\frac{\left[\frac{m(2L-s)+ns}{2L}\right]^2}{L'^2}$ a lieu pour chacune d'elles.

Dans tous les cas de vibration, ces différentes lames rendent donc les mêmes sons que la lame d'épaisseur constante $\frac{m+n}{2}$ et de longueur L. Remarquons à présent que les sons donnés par les divers points d'un corps sonore doivent être semblables entre eux et que, à défaut de cette condition, le corps dont il s'agit ne pourrait faire entendre qu'un bruit confus; nous en conclurons que, chacun des points d'une lame d'épaisseur variable dont l'épaisseur moyenne est exprimée par $\frac{m+n}{2}$ et dont la longueur est L ayant, durant le mouvement, ces

deux coordonnées égales à celles d'un point pris, sur une des lames fictives que nous avons considérées, et ne pouvant, par conséquent, donner un son différent de celui qui convient à la même lame, la lame entière d'épaisseur variable rendra les mêmes sons qu'une autre lame de même longueur dont l'épaisseur constante serait égale à l'épaisseur moyenne de la première.

9. S'il ne s'agissait que de justifier le choix du coefficient que nous avons adopté, le seul fait à établir, par rapport aux lames d'inégale épaisseur, serait l'existence des vibrations régulières. En effet, nous venons de voir qu'en admettant tout autre coefficient l'analyse exprimerait l'impossibilité de semblables phénomènes; mais, les conséquences de cette régularité de mouvements dans les lames élastiques d'épaisseur variable nous ayant fait connaître jusqu'aux moindres circonstances des mêmes mouvements, nous nous proposons aussi de comparer, avec quelques détails, les résultats de la théorie à ceux de l'expérience.

Les premiers sont, en adoptant l'exposant convenable, que la lame élastique d'épaisseur variable est susceptible de tous les genres de vibrations qui appartiennent à la lame d'épaisseur constante; que l'inégalité d'épaisseur entre les différents points de la lame vibrante donne lieu au changement de la figure que cette lame affecte durant son mouvement; en sorte que, par rapport à tous les cas de vibrations, la figure dont il s'agit ne peut appartenir à aucune lame uniformément épaisse, quelle que soit d'ailleurs l'épaisseur qu'on veuille lui attribuer. Une telle conclusion paraîtra évidente si l'on se rappelle qu'aucune des lames fictives à la considération desquelles on a eu recours ne peut avoir deux valeurs de l'ordonnée z égales à celles qui, sur la lame d'épaisseur variable, se rapportent à deux points consécutifs. Enfin la théorie annonce encore que l'inégale répartition d'une même épaisseur variable entre les différents points de la lame élastique n'a aucune influence sur les sons correspondant à chaque cas de vibration. Ainsi, tandis que les différences d'épaisseurs moyennes, constantes ou variables, déterminent le changement des sons, sans que les figures correspondantes éprouvent la moindre altération, au contraire, selon qu'on répartit entre les points de la lame une épaisseur moyenne

donnée, il arrive que la production d'un son identique se trouve accompagnée de figures différentes.

Voyons maintenant quels sont les faits observés.

Les divers cas de vibrations que présente la lame élastique d'épaisseur constante ont également lieu sur la lame d'épaisseur variable. De part et d'autre, l'intervalle des sons est le même, et chacun d'eux se trouve accompagné de figures nodales composées d'un égal nombre de points de repos. Si, dans chaque cas de vibration, on compare la position des nœuds sur la lame d'épaisseur constante à celle des mêmes nœuds sur la lame d'épaisseur variable, on observe des différences d'intervalles d'autant plus sensibles que celle des épaisseurs extrêmes est plus considérable.

La disposition des lignes de repos sur les pièces dont l'épaisseur varie d'un point à l'autre avait depuis longtemps fixé mon attention; elle m'avait donné lieu de remarquer (*voir* la note, p. 35 de mes *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*) que l'exposant attribué jusqu'à présent à l'épaisseur ne semblait pas devoir fournir, à cet égard, une explication suffisante. J'étais loin de soupçonner alors que le choix de cet exposant dût entraîner d'autres conséquences qu'une inégalité de compensation entre des changements d'épaisseurs moyennes, proportionnels à ceux des longueurs respectives. J'ai fait un grand nombre d'expériences pour vérifier la parfaite égalité de cette compensation, et j'ai mis d'autant plus de soin à mesurer, sur les lames d'épaisseur variable, les distances des lignes nodales, qu'elles étaient d'abord le seul moyen de vérification que j'eusse imaginé.

L'accord le plus satisfaisant entre la théorie et l'expérience s'est constamment manifesté. En effet, les lignes nodales étaient toujours plus distantes de l'extrémité où l'épaisseur était plus considérable que de l'autre extrémité, et dans une telle proportion qu'elle aurait pu suffire pour faire rejeter tout autre exposant que celui que j'avais déjà adopté. Il est sans doute inutile d'ajouter que la position du point de limite, dont l'existence nécessaire nous a conduits à la connaissance des effets de la variabilité de l'épaisseur, était aussi plus distante de celle des extrémités où l'épaisseur se trouvait la plus grande. Plusieurs lames de verre ont été coupées en ce point; les parties séparées ont continué de rendre les mêmes sons, et elles se sont prêtées à tous les

cas de vibration qui ont lieu dans les deux moitiés d'une lame d'épaisseur constante.

Non seulement les lames d'épaisseur variable se prêtent à tous les cas de vibration qui appartiennent proprement à la lame d'épaisseur constante, mais aussi, lorsqu'elles ont une largeur suffisante, elles sont susceptibles, comme ces dernières, de vibrer à la manière des plaques. Alors les figures nodales présentent, de part et d'autre, une ligne longitudinale au milieu de sa largeur et un nombre de lignes transversales plus ou moins grand, suivant que les sons correspondants sont plus ou moins aigus. Dans ce genre de vibrations, la position des lignes nodales sur la lame d'épaisseur constante est facile à reconnaître, car l'intervalle entre deux de ces lignes est toujours exactement double de celui qu'on observe entre une des extrémités de la ligne la plus voisine. Dans les autres cas de vibration, la disposition des nœuds est sans doute conforme à la théorie, mais on ne pourrait plus s'en assurer sans recourir à la discussion des formules. Je me suis convaincue qu'à l'aide d'une analyse semblable à celle qui détermine alors la position des lignes nodales sur la lame d'épaisseur constante, on obtiendrait en effet la mesure du déplacement des mêmes lignes sur la lame d'épaisseur variable. Afin d'éviter des longueurs inutiles, je me bornerai à rapporter un seul exemple. Je choisirai l'expérience où, en même temps que la figure nodale composée du plus petit nombre possible de lignes offrait, sur la lame d'épaisseur constante, une disposition dont le moindre dérangement fût devenu sensible, la différence entre les épaisseurs extrêmes donnait lieu, sur la lame d'épaisseur variable, à un déplacement considérable.

Une lame de cuivre, dont la longueur était de $0^{m},245$ et la largeur de $0^{m},028$, les épaisseurs extrêmes comme 1 et 2, a présenté la figure composée d'une ligne longitudinale et de deux lignes transversales; les distances entre les lignes voisines des extrémités et les mêmes extrémités étaient de $0^{m},045$ et $0^{m},075$; l'intervalle entre les deux lignes s'est donc trouvé sensiblement égal à ce qu'il eût été sur la lame d'épaisseur constante.

Il est donc facile de se rendre compte de cette dernière circonstance, car nous avons vu (§ 5) que, quelle que soit l'étendue d'une partie prise au milieu de notre lame, son épaisseur moyenne est toujours

égale à celle de la lame entière; il en résulte que la longueur des parties vibrantes ainsi situées doit être la même que sur la lame d'épaisseur constante. A la vérité, ce résultat exigerait, pour être parfaitement exact, que le milieu de la partie vibrante fût en même temps celui de la lame; mais, sous l'influence des causes d'erreur impossibles à éviter, il est difficile que des différences aussi petites deviennent sensibles.

Pour expliquer la position de nos deux lignes nodales par rapport aux extrémités voisines respectives, nous ne pouvons éviter l'emploi des formules. Suivant ce qu'on a vu § 5, la quantité $\frac{m(2L-s)+ns}{2L}$ est l'épaisseur moyenne d'une partie de longueur s, comprise entre l'extrémité d'épaisseur m, d'une lame dont la longueur totale est L, et le point dont s est l'ordonnée, l'épaisseur de l'autre extrémité étant n. Nous avons ici $m=2$, $n=1$, $L=245$, $s=75$: l'épaisseur moyenne devient donc $\frac{2(490-75)+75}{490}=\frac{905}{490}$. Afin d'appliquer la même formule à l'intervalle compris entre l'autre extrémité de la ligne nodale voisine, nous changerons m en n, et réciproquement, et nous mettrons 45 à la place de 75. Nous aurons ainsi $\frac{490-45+2.45}{490}=\frac{535}{490}$ pour l'épaisseur moyenne correspondante.

Les épaisseurs moyennes des deux parties que nous avons à comparer sont donc entre elles comme 905 est à 535 ou comme 181 est à 107. Suivant la théorie, les épaisseurs doivent être proportionnelles aux longueurs respectives; il en résulterait ici la proportion $181:107::75:45::5:3$, et l'on serait conduit à la condition $535=543$. La différence entre les deux membres de cette équation paraîtra bien petite si l'on tient compte de toutes les causes d'erreur inévitables dans de telles expériences. En effet, le moindre changement dans la loi de la variation d'épaisseur influe sur les distances des lignes voisines, et, pour que des différences d'élasticité naturelle viennent compliquer les effets dus à la variation de l'épaisseur, il peut même suffire qu'un des points de la lame ait reçu un coup de marteau plus fort que ceux qui auraient frappé les points voisins.

Dans les nombreuses expériences que j'ai faites, les différences que j'ai observées se sont trouvées tantôt en plus, tantôt en moins; en

sorte que, à défaut de l'exactitude parfaite que l'expérience ne peut toujours atteindre, et dont cependant j'ai remarqué quelques exemples, ces différences mêmes peuvent servir à confirmer la théorie. Au surplus, la même chose a lieu par rapport à la position des lignes nodales sur les lames d'épaisseur constante, et les petites irrégularités qu'on aperçoit alors sont du même ordre que celles que nous trouvons ici.

Lorsque, à l'exemple de M. Wheatstone, on fait vibrer une lame couverte d'eau, les ondes dont l'amplitude est égale sur la lame d'épaisseur constante manifestent, sur la lame d'épaisseur variable, l'inégalité que nous avons reconnue entre les différentes valeurs de l'ordonnée z. Deux ondes voisines sont sensiblement égales; mais on remarque une dégradation évidente lorsqu'on observe, comparativement, les plus proches et les plus éloignées de l'extrémité où l'épaisseur est la plus grande. Ainsi que je l'ai expliqué ailleurs [1], les expériences de ce genre doivent être regardées comme une contre-épreuve de celles de M. Chladni; elles prouvent également que la figure d'aucune lame vibrante d'épaisseur constante ne peut être semblable à celle qui appartient, dans les mêmes circonstances, à la lame d'épaisseur variable.

Il nous reste à faire connaître les résultats de l'expérience à l'égard de l'influence qu'a sur les sons l'inégale répartition de l'épaisseur entre les différents points de la lame vibrante.

Un grand nombre de faits analogues m'ont prouvé que l'épaisseur moyenne détermine, seule, l'inégalité des sons entre deux lames égales d'ailleurs : je n'ai jamais remarqué la plus petite exception à cette loi. Pour rendre l'expérience plus concluante, je me suis procuré une lame de cuivre fabriquée en même temps que celle dont j'ai parlé plus haut et avec les plus grands soins pour que la différence de ces deux pièces fût uniquement, d'une part, l'égalité d'épaisseur et, de l'autre, la variation de la même épaisseur dans la proportion de 1 à 2, pour les points extrêmes.

Dans tous les cas possibles de vibration, la différence des sons s'est trouvée au-dessous d'un demi-ton : elle était, par conséquent, au-dessous de la limite des erreurs qui ont été regardées comme inévitables, dans les cas même où la possibilité d'employer des pièces de verre

---

[1] Voir la Note A, à la fin du Mémoire.

prises dans le même morceau permet d'écarter l'influence des différences d'élasticité naturelle.

Je ferai observer que ce dernier résultat suffirait seul pour justifier la théorie qui vient d'être exposée, qu'il ne saurait exister dans toute autre supposition et qu'il est une conséquence immédiate de la considération des épaisseurs moyennes.

Nous verrons, dans les paragraphes suivants, qu'une théorie semblable s'applique également aux surfaces d'épaisseur variable.

10. Par rapport aux surfaces, le cas le plus simple qu'on puisse imaginer est celui d'une plaque carrée dont l'épaisseur varierait d'un point à l'autre en raison des distances aux quatre angles de la même plaque, qui présenteraient tous des épaisseurs différentes.

Nous commencerons par déterminer, dans cette hypothèse, l'épaisseur pour chacun des points de la plaque et les épaisseurs moyennes des espaces carrés dont quatre des mêmes points termineraient les angles.

Désignons à la fois par les lettres m, m', n et n' les quatre épaisseurs extrêmes et les angles auxquels elles appartiennent. Soit A la grandeur du côté de la plaque; prenons le point m pour origine; la position des différents points de la surface sera déterminée par leur distance aux deux côtés adjacents mn et mm', qui seront les axes des coordonnées; désignons-les par les lettres s et r.

En opérant ici comme nous l'avons fait § 5, à l'occasion de la lame d'épaisseur variable, les formules $\frac{m(\text{A}-s)+ns}{\text{A}}$, $\frac{m'(\text{A}-s)+ns}{\text{A}}$ représenteront les épaisseurs de la plaque dans deux points; le premier placé sur l'axe des s à la distance s de l'origine, le second appartenant au côté parallèle $m'n'$ et distant de la quantité s de l'angle m'.

Quelle que soit la position d'un point pris sur la surface, on peut toujours trouver une valeur de s telle que le point dont on cherche l'épaisseur appartienne à la ligne qui joint les deux points dont les formules précédentes font connaître les épaisseurs.

Supposons qu'il s'agisse d'un point placé aux distances r et s des côtés mn et mm'; l'épaisseur correspondante sera donnée par la formule $\frac{\left[\frac{m(\text{A}-s)+ns}{\text{A}}\right](\text{A}-r)+\left[\frac{m'(\text{A}-s)+n's}{\text{A}}\right]r}{\text{A}}$.

On voit en effet que les épaisseurs extrêmes de la ligne à laquelle appartient le point dont il est question sont employées ici de la même manière que l'ont été les quantités analogues dans les formules précédentes.

En effectuant les développements convenables, nous aurons

$$\frac{\left[\frac{m(A-s)+ns}{A}\right](A-r)+\left[\frac{m'(A-s)+n's}{A}\right]r}{A}$$

$$=\frac{mA^2-mAr-mAs+msr+nAs-nsr+m'Ar-m'sr+n'sr}{A^2}$$

$$=\frac{mA^2-mA(r+s)+A(ns+m'r)+(m-n-m'+n')rs}{A^2}.$$

Supposons ensuite que l'épaisseur

$$\frac{mA^2-mA(r+s)+A(ns+m'r)+(m-n-m'+n')rs}{A^2}$$

appartienne au point de la surface situé à l'un des angles d'un espace carré pris sur la même surface; si t est le côté de ce carré, les épaisseurs correspondantes aux trois autres angles seront

$$\frac{mA^2-mA(r+s+t)+A[n(s+t)+m'r]+(m-n-m'+n')(s+t)r}{A^2},$$

$$\frac{mA^2-mA(r+t+s)+A[ns+m'(r+t)]+(m-n-m'+n')s(r+t)}{A^2}$$

et

$$\frac{mA^2-mA(r+t+s+t)+A[n(s+t)+m'(r+t)]+(m-n-m'+n')(s+t)(r+t)}{A^2}.$$

Cherchons à présent quelle est l'épaisseur moyenne de l'espace carré terminé par les lignes qui joignent les quatre angles.

Soit qu'il s'agisse d'une ligne ou d'une surface matérielle d'épaisseur variable, il est clair qu'on trouverait l'épaisseur moyenne convenable à chaque cas si, après avoir pris la somme des épaisseurs de tous les points qui appartiennent soit à la lame, soit à la surface, on divisait cette somme par le nombre des mêmes points.

A l'égard de la lame, les épaisseurs des différents points qu'on parcourt en allant d'une extrémité à l'autre étant en progression arithmétique, si l'on prend la somme des épaisseurs de deux d'entre eux, semblablement placés par rapport aux extrémités respectives, cette somme,

divisée par 2, donnera également l'épaisseur moyenne de la ligne entière, et c'est ce que nous avons pratiqué § 5. On voit, au reste, que la première opération n'est autre chose que la somme de celles qu'on peut lui substituer; car on épuiserait toute la ligne en prenant successivement, deux à deux, tous les points qui la composent.

Des remarques semblables peuvent s'appliquer à la plaque carrée d'épaisseur variable. Conformément à ce que nous avons établi plus haut, les épaisseurs des différents points qu'on parcourt en allant d'une extrémité à l'autre des côtés sont en progression arithmétique, et les épaisseurs extrêmes appartiennent aux quatre angles. Il en résulte qu'on aura l'épaisseur moyenne de la plaque entière si, après avoir pris la somme des épaisseurs qui conviennent à quatre points placés semblablement par rapport aux quatre angles, on divise cette somme par 4. La même opération, répétée successivement à toutes les distances possibles des angles, prises sur les côtés, épuisera les lignes matérielles qui appartiennent au contour. La surface restante sera terminée par de nouveaux côtés plus petits que les premiers; on n'aura plus qu'à continuer des opérations du même genre pour arriver enfin au centre de la plaque, et l'épaisseur en ce point sera aussi exprimée par la même formule.

Ce qu'on vient de lire est également applicable à tout espace de même forme pris sur la plaque carrée. Il est évident en effet, d'après la loi de variation à laquelle sont assujettis les différents points de cette surface, qu'il est permis de la diviser par un nombre égal de lignes parallèles à chacun des côtés sans que les résultats précédents reçoivent la moindre modification.

Nous venons de voir que chacune des opérations indiquées conduirait à la même formule et que cette formule exprimerait l'épaisseur moyenne de la surface carrée. On peut en conclure que les différents espaces de même forme, dont le centre se confond avec celui de la plaque et dont les côtés sont plus ou moins distants de ce point, ont tous la même épaisseur moyenne, et que cette épaisseur est égale à celle du centre même qui sert ici de limite.

Observons que cette conclusion est parfaitement analogue à ce que nous avons trouvé § 5, relativement à la lame d'épaisseur variable.

L'expression de l'épaisseur moyenne soit de la plaque entière, soit

d'une de ses parties carrées, se présentera sous la forme la plus simple qu'elle puisse recevoir si les quatre épaisseurs qui doivent y entrer sont prises aux angles mêmes de la surface.

En faisant usage des formules ci-dessus, nous aurons ainsi, pour l'épaisseur moyenne de la petite surface carrée dont le côté est t,

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\left\{\begin{aligned}&4m\mathrm{A}^2 - m\mathrm{A}[r+s+2(r+s+t)+r+s+2t]\\ &\quad + \mathrm{A}\{n[2s+2(s+t)]+m'[2r+2(r+t)]\} + (m-n-m'+n')[st+(s+t)r+(r+t)s+(s+t)(r+t)]\end{aligned}\right\}}{4\mathrm{A}^2}\\ &= \frac{4m\mathrm{A}^2 - 2m\mathrm{A}(2r+t+2s+t) + 2\mathrm{A}[n(2s+t)+m'(2r+t)] + (m-n-m'+n')(2r+t)(2s+t)}{4\mathrm{A}^2}.\end{aligned}\right.$$

Si la surface dont nous parlons a un angle commun avec la plaque entière, la formule (A) deviendra elle-même beaucoup plus simple. En effet, quand on prend successivement $r=0$, $s=0$; $r=0$, $s=\mathrm{A}$; $r=\mathrm{A}$, $s=0$, et $r=\mathrm{A}$, $s=\mathrm{A}$, en ayant toutefois soin d'écrire $2\mathrm{A}-t$ au lieu de $2\mathrm{A}+t$, pour satisfaire aux changements supposés dans les situations relatives à l'origine, cette formule donne, après les réductions convenables,

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{4m\mathrm{A}^2 - 4m\mathrm{A}t + 2\mathrm{A}(nt+m't) + (m-n-m'+n')t^2}{4\mathrm{A}^2},\\ &\frac{4n\mathrm{A}^2 - 4n\mathrm{A}t + 2\mathrm{A}(mt+n't) + (n-m-n'+m')t^2}{4\mathrm{A}^2},\\ &\frac{4m'\mathrm{A}^2 - 4m'\mathrm{A}t + 2\mathrm{A}(mt+n't) + (m'-n'-m+n)t^2}{4\mathrm{A}^2},\\ &\frac{4n'\mathrm{A}^2 - 4n'\mathrm{A}t + 2\mathrm{A}(nt+m't) + (m-n-m'+n')t^2}{4\mathrm{A}^2}.\end{aligned}\right.$$

Les formules (B) expriment les épaisseurs moyennes de quatre espaces carrés de grandeurs égales, pris aux angles de la surface.

Lorsque l'on fait $t=\mathrm{A}$, les quatre petites surfaces se réduisent à une seule, qui n'est autre chose que celle de la plaque entière. Les formules (B) deviennent alors identiques, et elles donnent $\frac{m+m'+n+n'}{4}$ pour l'expression de l'épaisseur moyenne de cette surface. Indépendamment de toute supposition particulière sur la valeur de t, on arriverait, comme il est facile de le voir, au même résultat en prenant la somme des quatre formules (B) et en divisant cette formule par 4.

Pour se rendre raison de cette identité de résultats, il suffira, après

ce que nous avons vu plus haut, de remarquer que les quatre espaces dont les épaisseurs moyennes servent en dernier lieu à trouver celle de la plaque entière sont occupés par autant de groupes composés d'un égal nombre de points matériels semblablement placés par rapport aux angles respectifs de cette surface.

Les épaisseurs moyennes de deux côtés opposés étant $\frac{m+n}{2}$ et $\frac{m'+n'}{2}$, leur somme, divisée par 2, donnera aussi la même formule : ces deux côtés peuvent en effet être considérés aussi comme deux groupes composés d'un égal nombre de points matériels également situés par rapport au centre de la plaque. Cette dernière opération, comparée à celles qui nous ont donné les épaisseurs moyennes des simples lignes matérielles, montrent que les côtés remplacent ici les points extrêmes relatifs au cas linéaire. La même opération peut donc être regardée comme la somme de celles qui seraient pratiquées sur toutes les lignes matérielles perpendiculaires aux côtés dont il s'agit.

Sous ce point de vue, il devient clair que le rapport entre la grandeur des côtés et leur distance ne peut entraîner aucun changement dans le procédé qui doit faire connaître l'épaisseur moyenne du parallélogramme auquel ils appartiennent.

Il ne l'est pas moins que les épaisseurs aux quatre angles entrent toutes également dans la formule qu'on obtient. Nous en conclurons que, quel que soit le rapport entre les différents côtés d'un espace parallélogramme pris sur notre surface carrée, des formules analogues aux précédentes nous feront connaître les épaisseurs moyennes correspondantes.

Soient t et t' les grandeurs des côtés adjacents à l'angle du parallélogramme dont les coordonnées sont r et s; les épaisseurs aux quatre angles seront exprimées par les formules suivantes :

$$(\mathrm{C})\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{m\mathrm{A}^2 - m\mathrm{A}(r+s) + \mathrm{A}(ns+m'r) + (m-n-m'+n')rs}{\mathrm{A}^2},\\
&\frac{m\mathrm{A}^2 - m\mathrm{A}(r+s+t) + \mathrm{A}[n(s+t)+m'r] + (m-n-m'+n')(s+t)r}{\mathrm{A}^2},\\
&\frac{m\mathrm{A}^2 - m\mathrm{A}(r+t'+s) + \mathrm{A}[ns+m'(r+t)] + (m-n-m'+n')(r+t')s}{\mathrm{A}^2},\\
&\frac{m\mathrm{A}^2 - m\mathrm{A}(r+t'+s+t) + \mathrm{A}[n(s+t)+m'(r+t)] + (m-n-m'+n')(r+t')(s+t)}{\mathrm{A}^2}.
\end{aligned}\right.$$

Leur somme, divisée par 4, se réduit à

$$(\mathrm{D})\quad \frac{4m\mathrm{A}^2 - 2m\mathrm{A}(2r+t'+2s+t) + 2\mathrm{A}[n(2s+t) + m'(2r+t')] + (m-n-m'+n')(2r+t')(2s+t)}{4\mathrm{A}^2}.$$

Cette formule représente l'épaisseur moyenne dans l'espace parallélogramme, et, pour la rendre identique à la formule (B), il suffira de faire $t = t'$.

Lorsqu'on prend successivement $r = 0$, $s = 0$; $r = \mathrm{A}$, $s = 0$; $r = 0$, $s = \mathrm{A}$ et $r = \mathrm{A}$, $s = \mathrm{A}$, en ayant soin d'écrire $2\mathrm{A} - t$, $2\mathrm{A} - t'$ au lieu de $2\mathrm{A} + t$, $2\mathrm{A} + t'$, cette formule donne, après les réductions convenables,

$$(\mathrm{E})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{4m\mathrm{A}^2 - 2m\mathrm{A}(t+t') + 2\mathrm{A}(nt+m't) + (m-n-m'+n')tt'}{4\mathrm{A}^2}, \\ &\frac{4n\mathrm{A}^2 - 2n\mathrm{A}(t+t') + 2\mathrm{A}(mt'+n't) + (n-m-n'+m')tt'}{4\mathrm{A}^2}, \\ &\frac{4m'\mathrm{A}^2 - 2m'\mathrm{A}(t+t') + 2\mathrm{A}(mt'+n't) + (m'-n'-m+n)tt'}{4\mathrm{A}^2}, \\ &\frac{4n'\mathrm{A}^2 - 2n'\mathrm{A}(t+t') + 2\mathrm{A}(nt+m't') + (n'-m'-n+m)tt'}{4\mathrm{A}^2}. \end{aligned} \right.$$

Celles-ci expriment les épaisseurs moyennes de quatre surfaces parallélogrammes, prises aux angles de la plaque et égales entre elles.

Si l'on voulait avoir les épaisseurs moyennes des deux diagonales du parallélogramme à l'un des angles duquel appartiennent les coordonnées r et s, il faudrait prendre les sommes de celles des formules (D) qui se rapportent aux angles opposés et les diviser par 2; il en résulterait les formules suivantes :

$$(\mathrm{F})\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2m\mathrm{A}^2 - m\mathrm{A}(2r+t'+2s+t) + \mathrm{A}[n(2s+t) + m'(2r+t')] + (m-n-m'+n')[rs + (r+t')(s+t)]}{2\mathrm{A}^2}, \\ &\frac{2m\mathrm{A}^2 - m\mathrm{A}(2r+t'+2s+t) + \mathrm{A}[n(2s+t) + m'(2r+t')] + (m-n-m'+n')[r(s+t) + s(r+t')]}{2\mathrm{A}^2}. \end{aligned} \right.$$

Il existe un cas fort remarquable dans lequel les différentes formules auxquelles on vient d'être conduit reçoivent une grande simplification; c'est celui où les épaisseurs extrêmes m, n, m' et n' sont en progression

arithmétique. En prenant alors $m = d + 3\delta$, $n = d + 2\delta$, $m' = d + \delta$ et $n' = d$, il est visible que les termes dont $m - n - m' + n'$ est facteur disparaissent d'eux-mêmes. Les deux formules (F) sont donc semblables entre elles, et la formule (D) leur est identique. Dans les suppositions présentes, les épaisseurs moyennes des deux lignes matérielles diagonales d'un parallélogramme quelconque pris sur la surface carrée sont, par conséquent, égales entre elles, et elles sont aussi égales à l'épaisseur moyenne du même parallélogramme.

Si l'épaisseur variait dans un seul sens, c'est-à-dire si l'on avait $m = m'$, $n = n'$, le facteur $m - n - m' + n'$ se réduirait encore à zéro; et, par conséquent, les épaisseurs moyennes des deux diagonales et du parallélogramme auquel elles appartiennent seraient aussi égales entre elles.

Les formules précédentes vont nous servir à trouver les conditions du mouvement régulier par rapport à la plaque élastique d'épaisseur variable.

11. En traitant du cas linéaire, nous avons déterminé, par la considération des conditions nécessaires à l'existence des mouvements réguliers, l'exposant de la puissance de l'épaisseur qui multiplie la variable dans l'intégrale. Il serait facile de suivre ici la même marche, mais elle entraînerait de longs calculs; il sera plus simple de regarder d'abord l'exposant de l'épaisseur comme étant connu et de montrer ensuite que les résultats obtenus ne pourraient avoir lieu dans aucune autre supposition. Observons que cette manière de procéder est d'autant plus naturelle, qu'on ne saurait admettre que la puissance de l'épaisseur soit différente par rapport aux surfaces de ce qu'on l'a trouvée par rapport aux simples lames.

Lorsqu'il s'agit d'une surface d'épaisseur constante, l'intégrale qui fournit les différentes valeurs de l'ordonnée z est fonction des deux autres coordonnées x et y.

Par rapport à la plaque carrée dont le côté et l'épaisseur sont A et e, on peut indifféremment écrire, dans l'intégrale, ou $\frac{ex}{A}$, $\frac{ey}{A}$ ou $\frac{x}{A}$, $\frac{y}{A}$, pourvu que, dans ce dernier cas, la quantité e^4 se retrouve comme facteur dans le coefficient des derniers termes de l'équation différen-

tielle. Lorsque l'épaisseur varie d'un point à l'autre de la surface, cette dernière manière d'envisager la question cesse d'être applicable. Nous allons chercher quelles sont alors les formules qui doivent remplacer les quantités $\frac{ex}{A}$, $\frac{ey}{A}$ dans la fonction qui exprime les différentes valeurs de z.

Il règne la plus grande analogie entre le cas présent et celui que nous avons déjà examiné. Quand il était question d'une simple lame, l'épaisseur variait d'un point à l'autre, en raison seulement des changements des distances aux extrémités linéaires.

Par rapport à un point donné, il a suffi de multiplier, sous le signe intégral, la différentielle de l'ordonnée qui mesurait la distance de ce point à l'extrémité prise pour origine, par l'épaisseur de la lame au même point. En prenant ensuite la somme de ce produit, on a obtenu une formule applicable à tous les points de la lame, formule parfaitement analogue à celle qu'on peut employer lorsque l'épaisseur est supposée constante.

Nous allons nous occuper, non plus seulement d'une ligne matérielle élastique, mais d'une surface carrée. Chacun des points qui la composent appartient également aux deux lignes matérielles parallèles aux côtés, qui se croisent au même point, et l'épaisseur varie en raison des distances aux deux axes des coordonnées, axes que nous avons déjà désignés par les lettres s et r, pour les distinguer de ceux qui appartiennent à la plaque d'épaisseur constante.

Si e' représente l'épaisseur d'un des points, en le considérant d'abord comme appartenant à une ligne parallèle à l'axe des r, on aura la formule $\int e'dr$, semblable à celle qui convient au cas linéaire. Le même point appartient en même temps à une ligne parallèle à l'axe des s; en le prenant isolément, on doit multiplier l'épaisseur qui lui convient par la différentielle de s. Observons que la formule $\int e'dr$ remplace ici le produit ey de l'épaisseur par l'ordonnée et que ce produit, divisé par y, donne l'épaisseur e : nous verrons alors que la formule $\int e'dr$, divisée par r, donnera l'épaisseur du point dont il s'agit, en tant qu'il est regardé comme appartenant déjà à la ligne parallèle à l'axe des r, que la formule $\frac{\int e'\,dr}{r}\,ds$ conviendra au même point et que la somme $\int\left(\frac{\int e'\,dr}{r}\right)ds$, applicable à tous les points de la plaque d'épaisseur variable, rempla-

cera la quantité ex, qui convient à la plaque d'épaisseur constante.

Par des raisonnements semblables on trouvera que, dans l'intégrale relative à la plaque d'épaisseur variable, la formule $\int\left(\frac{\int e'\,ds}{s}\right)dr$ doit remplacer la quantité ey, qui appartient au cas où l'épaisseur de la surface est supposée constante.

Le point auquel nous avons attribué l'épaisseur e' est celui dont les coordonnées sont r et s; par conséquent, les formules (C) donnent

$$e' = \frac{mA^2 - mA(r+s) + A(ns + m'r) + (m - n - m' + n')rs}{A^2}.$$

On en conclut

$$\frac{\int e'\,dr}{r} = \frac{mA^2 - mA(\frac{1}{2}r + s) + A(ns + m'\frac{1}{2}r) + (m - n - m' + n')\frac{1}{2}rs}{A^2}$$

$$= \frac{2mA^2 - mA(r+2s) + A(2ns + m'r) + (m - n - m' + n')rs}{2A^2},$$

$$\int\left(\frac{\int e'\,dr}{r}\right)ds = \frac{2mA^2 - mA(r+s) + A(ns + m'r) + (m - n - m' + n')\frac{rs}{2}}{2A^2}s$$

$$= \frac{4mA^2 - 2mA(r+s) + 2A(ns + m'r) + (m - n - m' + n')rs}{4A^2}s.$$

On conclut également de la même valeur de e'

$$\frac{\int e'\,ds}{s} = \frac{2mA^2 - mA(2r+s) + A(ns + 2m'r) + (m - n - m' + n')rs}{2A^2},$$

$$\int\left(\frac{\int e'\,ds}{s}\right)dr = \frac{4mA^2 - 2mA(r+s) + 2A(ns + m'r) + (m - n - m' + n')rs}{4A^2}r.$$

Suivant les formules (E), la valeur qu'on vient de trouver pour les deux quantités $\int\left(\frac{\int e'\,dr}{r}\right)ds$, $\int\left(\frac{\int e'\,ds}{s}\right)dr$, divisées respectivement par s et par r, exprime l'épaisseur moyenne de l'espace parallélogramme dont un des angles est commun avec l'angle m de la surface et dont les côtés s et r sont les coordonnées de l'angle opposé au premier.

Il est clair qu'à chaque nouvelle valeur de r et de s correspond un parallélogramme différent, et par conséquent aussi une épaisseur moyenne différente. En continuant de désigner par e et A l'épaisseur et le côté de la plaque carrée dont l'épaisseur constante est égale à l'épaisseur moyenne de la surface qui fait l'objet de nos recherches,

nous nommerons E l'épaisseur moyenne correspondant à une valeur donnée de s et r; la longueur A′, qui sera le quatrième terme de la proportion $e : A :: E : A'$; appartiendra au côté d'une plaque carrée dont l'épaisseur constante serait E.

Dans la fonction qui donne les valeurs de z relatives à la plaque d'épaisseur variable, on devra écrire $\frac{Es}{A'}$, $\frac{Er}{A'}$. Chacune de ces valeurs appartiendra en même temps à autant de plaques fictives dont les côtés et les épaisseurs seront A′ et E.

De ce que nous avons dit plus haut il résulte que les sons correspondant à chacun des cas de vibration dont une plaque carrée est susceptible sont en raison directe de l'épaisseur et en raison inverse du carré du côté de la même plaque.

La proportion $e : A :: E : A'$ donne lieu à l'équation $\frac{e^2}{A^2} = \frac{e'^2}{A'^2}$; dans tous les cas de vibration, les sons rendus par chacune des plaques fictives dont nous venons de parler sont donc les mêmes que ceux qui appartiennent, sous les mêmes conditions, à la plaque carrée dont l'épaisseur et le côté sont e et A.

Lorsqu'un corps sonore est susceptible de vibrations régulières, le son rendu par chacun de ses points ne saurait être différent de celui que fait entendre le corps entier; chacun des points de la plaque d'épaisseur variable qui exécute les mêmes mouvements que s'il appartenait à une de nos plaques fictives doit donc rendre les mêmes sons que ces plaques, et par conséquent aussi les mêmes sons que la plaque dont l'épaisseur constante et le côté sont e et A. Il s'ensuit que deux plaques carrées dont les côtés sont égaux et dont les épaisseurs moyennes sont égales aussi donnent, dans les mêmes cas de vibration, des sons semblables, quoique l'épaisseur soit constante dans l'une et variable dans l'autre.

De ce qu'on vient de voir on peut encore conclure que, si l'inégale distribution de l'épaisseur entre les différents points d'une plaque carrée ne donne lieu à aucun changement par rapport aux phénomènes sonores, elle change au contraire tellement les figures que la surface affecte durant ses divers mouvements, qu'aucune plaque d'épaisseur constante ne pourrait se ployer aux mêmes figures.

12. En se bornant à la loi de variation qui sert de base aux recherches précédentes, les résultats que nous venons d'exposer renferment la théorie de la plaque d'épaisseur variable.

Dans les formules $\int\left(\frac{\int e' dr}{r}\right)ds$, $\int\left(\frac{\int e' ds}{s}\right)dr$, nous avons pris, comme on le doit, $t = 1$, et cette valeur, dont l'exactitude nous était déjà connue, nous a conduits à la considération des épaisseurs moyennes.

Ainsi que nous avons déjà eu occasion de le dire, la compensation qui s'établit, durant le mouvement de la plaque d'épaisseur variable, entre les épaisseurs moyennes des parties qui la composent et l'étendue des mêmes parties, aurait pu être présentée comme une condition indispensable de la possibilité des mouvements réguliers de la surface, et nous serions également parvenus à en conclure la nécessité de l'équation $t = 1$.

En effet, l'existence des lignes de limite, dans tous les cas de vibrations régulières, aurait servi à prouver la compensation entre l'épaisseur moyenne et l'étendue des parties que ces lignes séparent.

Si on eût voulu remonter plus haut, il eût été facile de se passer de la considération des lignes de limite : il eût suffi d'admettre qu'un même cas de vibration, considéré dans deux surfaces d'épaisseur et d'étendue différentes, donne lieu à l'existence du même nombre de valeurs homologues de l'ordonnée z; chacune de ces valeurs aurait pu alors être employée avec autant d'avantage que les lignes de limite pour déterminer, dans le cas d'une épaisseur variable, quel est le point de la surface auquel elles appartiennent, et la compensation que nous avons en vue n'aurait pas semblé moins nécessaire.

Remarquons que les expériences imaginées par M. Wheatstone rendent sensible l'existence des valeurs homologues de l'ordonnée z. Le nombre des ondes qui se manifestent dépend de celui de ces valeurs, et l'amplitude des mêmes ondes fait connaître la distance des points auxquels elles appartiennent.

Cette manière d'envisager la question est donc appuyée sur la nature intime des mouvements de vibration, et, en ayant recours à la considération des lignes de limites, on ne fait autre chose que de choisir pour exemple des valeurs particulières de l'ordonnée z.

Les compensations nécessaires à l'existence des mouvements réguliers

de la plaque d'épaisseur variable une fois admises conduiraient ensuite à déterminer la valeur de t dans les formules $\int\left(\frac{\int e^t\,dr}{r}\right)ds$, $\int\left(\frac{\int e^t\,ds}{s}\right)dr$.

En se contentant même d'observer que de telles compensations exigent qu'on puisse satisfaire aux équations suivantes,

$$\int\left\{\frac{\int\left[\frac{m\mathrm{A}^2 - m\mathrm{A}(r+s) + \mathrm{A}(ns+m'r) + (m-n-m'+n')rs}{\mathrm{A}^2}\right]^t dr}{r}\right\}ds$$
$$= \frac{[4m\mathrm{A}^2 - 2m\mathrm{A}(r+s) + 2\mathrm{A}(ns+m'r) + (m-n-m+n)rs]^t}{4\mathrm{A}^2}s,$$
$$\int\left\{\frac{\int\left[\frac{m\mathrm{A}^2 - m\mathrm{A}(r+s) + \mathrm{A}(ns+m'r) + (m-n-m'+n')rs}{\mathrm{A}^2}\right]^t ds}{s}\right\}dr$$
$$= \frac{[4m\mathrm{A}^2 - 2m\mathrm{A}(r+s) + 2\mathrm{A}(ns+m'r) + (m-n-m'+n')rs]^t}{4\mathrm{A}^2}r,$$

on verra clairement que l'unité est la seule valeur qui puisse être attribuée à l'exposant t. On conclura donc ici, comme on l'a fait dans le cas linéaire, que, en adoptant toute autre valeur, l'analyse exprimerait, à l'égard des plaques d'épaisseur variable, l'impossibilité des phénomènes sonores.

Quand l'épaisseur varie seulement dans le sens d'un des axes, c'est-à-dire quand on a à la fois $m = m'$, $n = n'$, les formules qui sont propres à la surface deviennent applicables soit à la lame d'épaisseur constante, soit à la lame d'épaisseur variable, selon qu'on regarde comme constante l'une ou l'autre des ordonnées s et r. Ce qui arrive alors est entièrement analogue à ce qui a lieu entre les plaques et les lames d'épaisseur constante. Aucun rapport semblable ne saurait exister entre les formules qui appartiennent à la surface dont l'épaisseur varie en raison des distances de chacun de ses points aux quatre angles supposés d'épaisseurs différentes et celles des lames auxquelles la même surface se trouverait réduite si l'on faisait abstraction d'une de ses dimensions. En effet, la loi de la variation suppose alors l'existence des quatre angles de la surface; il y aurait donc une contradiction manifeste si l'on voulait ensuite faire abstraction de deux d'entre eux.

Les conséquences de la théorie que nous venons d'établir sont :

Que les plaques d'épaisseur variable doivent être susceptibles de

tous les genres de vibrations qui appartiennent aux plaques d'épaisseur constante;

Que deux plaques, d'ailleurs semblables, dont l'épaisseur moyenne, égale de part et d'autre, est constante dans l'une et variable dans l'autre, doivent, dans les mêmes cas de vibration, faire entendre les mêmes sons;

Enfin que les figures correspondantes qu'affectent les deux surfaces, et par conséquent aussi les figures nodales qui servent à faire distinguer les premières, doivent présenter des différences propres à faire reconnaître la compensation qui s'établit, pendant le mouvement, entre les épaisseurs moyennes des différentes parties de la plaque d'épaisseur variable et l'étendue des mêmes parties.

Il reste à rendre compte des résultats de l'expérience.

13. Il m'a été très difficile de me procurer des plaques où l'épaisseur fût répartie selon la loi qui fait l'objet de mes recherches; et, quoique j'aie borné ma demande au cas le plus simple qui y est compris, l'exécution en paraissait impossible. Je dois à l'obligeance de M. d'Arcet [1]

---

[1] D'Arcet était très lié avec la famille de Sophie Germain. Il nous a semblé à propos de reproduire ici la Lettre suivante :

A Monsieur d'Arcet, à la Monnaie, Paris.

« MONSIEUR,

» J'ai lu avec intérêt le petit Mémoire que vous avez joint au joli échantillon que vous avez eu la bonté de m'envoyer [1]. J'admire toujours avec quelle sagacité vous faites servir vos nombreuses connaissances à tous les genres d'utilités. Combien sont rares et précieux les hommes qui savent faire de leur talent un bienfait pour la société!

» Je prends la liberté de vous adresser un exemplaire de mon petit Mémoire. Je n'espère guère qu'il puisse vous intéresser; aussi trouverai-je fort bon que vous le mettiez derrière le feu s'il vous embarrasse.

» J'aurai peut-être recours à votre complaisance pour savoir si je pourrais trouver quelque ouvrier qui sût donner au verre les différentes courbures qui seraient nécessaires aux expériences que je veux faire. J'ai dépensé 100^{fr} l'année dernière sans pou-

[1] Il s'agit du Mémoire de MM. d'Arcet et Thenard, intitulé *De l'emploi des corps gras comme hydrofuge dans la peinture sur pierre et sur plâtre et dans l'assainissement des lieux bas et humides.* Ce Mémoire, publié pour la première fois dans les *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXII, p. 24 (1826), a depuis été réimprimé plusieurs fois.

de m'avoir fait connaître un mécanicien habile, M. Moulfarine, qui a bien voulu se charger de ce travail.

Après une attente de trois mois, j'ai obtenu dix pièces dans lesquelles la même épaisseur moyenne était répartie de trois manières différentes. Dans les premières l'épaisseur aux quatre angles était comme 4, 2, 2 et 1; l'épaisseur moyenne était donc comme $\frac{9}{4}$. Dans les secondes, l'épaisseur aux quatre angles était comme 2, 2, 1 et 1. Enfin, dans les troisièmes, l'épaisseur constante était aussi comme $\frac{9}{4}$.

Toutes ces pièces ont été usées à la lime, pour être amenées aux épaisseurs exigées. Malgré l'exactitude sur laquelle je comptais, j'avais prévu l'impossibilité de reconnaître, par rapport aux points intérieurs, si la loi était scrupuleusement observée, et, comme je ne doutais pas que les moindres différences n'amenassent des distorsions dans les figures nodales, j'ai désiré avoir un nombre plus grand de plaques d'épaisseur constante que de plaques d'épaisseur variable.

Par cette précaution, les chances d'imperfection étant égales entre toutes les surfaces, soit d'épaisseur constante, soit d'épaisseur variable, j'ai acquis le moyen de distinguer les effets dus à la loi qui est l'objet de nos expériences de ceux que pouvait produire le défaut des pièces.

Dans les dix plaques, la grandeur du côté était très exactement de $0^m,100$; je n'ai remarqué que de faibles différences entre leurs poids, et les épaisseurs aux quatre angles étaient aussi telles que je les avais demandées.

Les expériences dont je vais rendre compte ont été faites sur trois pièces dont les poids étaient parfaitement égaux et où les épaisseurs étaient réparties suivant les trois modes que je viens d'appliquer. Ainsi, dans la première, l'épaisseur variait suivant deux directions; dans la seconde, suivant une seule; et dans la troisième ce genre de variation était nul. Ces pièces seront désignées à l'avenir par les trois lettres W, V et C.

---

voir obtenir autre chose que des fragments informes et d'un verre tellement recuit, qu'il était devenu impossible de le couper au diamant sans le casser en d'autres endroits.

» Agréez, Monsieur, mes remercîments et mes très humbles compliments.

» S. Germain.

» Ce 19 juillet. »

La théorie veut que les plaques d'épaisseur variable soient susceptibles de tous les genres de vibrations qui appartiennent aux plaques d'épaisseur constante.

L'expérience n'a présenté aucune exception à ce fait; les intervalles entre les sons correspondant à chaque cas de vibration des plaques d'épaisseur variable ont toujours été les mêmes qu'avec les plaques d'épaisseur constante, et, si les figures nodales ont montré des distorsions sur les premières, des distorsions analogues ont été observées sur les secondes.

Non seulement les plaques d'épaisseur variable doivent se prêter aux différents genres de vibrations qui ont lieu par rapport à celles dont l'épaisseur est constante, mais même, toutes les fois que l'épaisseur moyenne est égale de part et d'autre, les sons produits par ces vibrations doivent être les mêmes.

Cette indication de la théorie a été également confirmée par l'expérience.

Dans tous les cas de vibration auxquels elles se sont prêtées, les plaques W et C ont fait entendre exactement les mêmes sons. Il n'y a eu qu'une seule exception correspondant à la *fig.* 67 de Chladni : alors le son rendu par la plaque W était d'un demi-ton plus bas que celui qui appartenait aux deux autres plaques. Dans les deux premiers cas de vibration, la plaque V, comparée aux précédentes, a donné un ton et demi et un ton d'intervalle; ces deux sons étaient alors plus élevés qu'avec les pièces W et C. Dans les cas suivants, les trois pièces étaient à l'unisson.

J'ai comparé sous le même rapport trois plaques d'épaisseur constante, choisies parmi celles qui avaient exactement le même poids. Deux de ces pièces ont donné, dans le premier cas de vibration, l'intervalle d'un demi-ton; la troisième a présenté, toujours dans les deux premiers cas de vibration, la différence de deux tons et demi et deux tons. Dans les cas suivants, les sons se sont rapprochés; mais j'ai observé plusieurs fois des différences qui n'avaient pas eu lieu avec les pièces où l'épaisseur était diversement répartie. A la vérité, l'inspection des figures nodales m'a donné lieu de penser que, parmi les pièces qui étaient à ma disposition, celles que j'ai désignées par les lettres W, V et C étaient les plus parfaites.

Malgré cette raison de préférence, ces pièces ont encore montré, dans presque tous les cas de vibration, des distorsions très sensibles; aussi n'espérais-je pas d'abord obtenir des résultats aussi satisfaisants par leur constance et par leur exactitude.

Après avoir prouvé que l'inégale répartition de l'épaisseur n'a aucune influence sur les sons, il nous reste à examiner si, conformément à la théorie, les figures nodales qui accompagnent les mêmes sons sur la plaque d'épaisseur variable et sur celle d'épaisseur constante présentent en effet des différences propres à faire reconnaître la compensation qui s'établit, pendant le mouvement, entre les épaisseurs moyennes des différentes parties de la plaque d'épaisseur variable et l'étendue des mêmes parties.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les valeurs des coordonnées z, s et r et les sons correspondants, considérés sur la plaque d'épaisseur variable dont l'épaisseur moyenne et le côté sont e et A, se trouvent nécessairement les mêmes que s'ils appartenaient à une plaque fictive dont l'épaisseur constante et le côté seraient E et A.

Il s'ensuit que les grandeurs réelles de deux valeurs homologues, l'une de x et l'autre de s, sont entre elles comme celles des côtés A et A'.

Cela posé, l'épaisseur en un point de la plaque d'épaisseur variable, pouvant être considérée comme constante, rien n'empêche de déterminer toutes les circonstances du mouvement de ce point en lui appliquant les formules qui conviennent à la plaque fictive dont l'épaisseur constante et le côté sont E et A.

Prenons pour exemple les figures nodales qui appartiennent aux premiers cas de vibration contenus dans les formules

$$z = \cos\frac{p.\pi x}{\mathrm{A}}\cos\frac{q.\pi y}{\mathrm{A}},$$

$$z = \cos\frac{p.\pi s}{\mathrm{A}'}\cos\frac{q.\pi r}{\mathrm{A}'}.$$

En faisant $p = 1$, $q = 1$, les figures se réduisent à deux lignes nodales perpendiculaires entre elles et parallèles aux côtés.

Sur la plaque d'épaisseur constante, les deux lignes se croisent au centre de la surface, et chacune d'elles est terminée, aux côtés de la même surface, à égale distance des deux angles opposés.

Afin d'éviter l'emploi des formules plus compliquées, nous nous contenterons, dans ce premier exemple, de déterminer, par la considération des points qui appartiennent aux côtés de la même plaque, la position des deux lignes nodales sur la plaque d'épaisseur variable.

Les valeurs homologues de s et x sont entre elles comme les côtés des plaques auxquelles ces valeurs se rapportent. On a donc la proportion $x : s :: e : \mathrm{E}$.

Sur la plaque d'épaisseur constante, la valeur de x est $\frac{\mathrm{A}}{2} = 0^{\mathrm{m}},050$; l'épaisseur moyenne du côté qui joint sur la plaque W les angles 4 et 2 est comme 3; et l'épaisseur E est donnée ici par la formule linéaire

$$\frac{m(2\mathrm{A} - s) + ns}{2\mathrm{A}} = \frac{4.200 - 2s}{200}.$$

On a donc

$$50 : s :: 3 : \frac{400 - s}{100}, \quad 3s = \frac{400 - s}{2}, \quad s = \frac{400}{7} = 57 + \frac{1}{7}.$$

Par conséquent, la ligne qui se termine au côté de la plaque W, dont les angles 4 et 2 sont les points extrêmes, doit être à la distance de $0^{\mathrm{m}},057$ de l'angle 4 et de $0^{\mathrm{m}},043$ de l'angle 2.

Cette figure a été très irrégulière sur la plaque W et sur presque toutes les autres pièces tant d'épaisseur constante que d'épaisseur variable; cependant une seconde plaque, dont les épaisseurs extrêmes étaient comme sur la plaque W, a montré des distorsions moins grandes; les lignes nodales se sont formées à $0^{\mathrm{m}},055$ de l'angle 4, sur les deux côtés 4, 2.

La différence qu'on remarque ici entre la position indiquée par l'expérience et celle qui a été observée doit, quoique peu considérable, être attribuée à l'imperfection des pièces. Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer la même analyse au cas déjà pris pour exemple à l'occasion de la simple lame

On avait

$$\mathrm{A} = 245, \quad x = \frac{245}{4}, \quad m = 2, \quad n = 1, \quad e = \frac{3}{2},$$

$$\frac{m(2\mathrm{A} - s) + ns}{2\mathrm{A}} = \frac{2(2.245 - s) + s}{2.245} = \frac{980 - s}{2.245};$$

la proportion

$$\frac{245}{4} : s :: \frac{3}{2} : \frac{980 - s}{2.245}$$

aurait donné

$$3s = \frac{980 - s}{4}, \quad s = \frac{980}{13} = 0^{m},075 + \frac{5}{13}.$$

En changeant m en n et réciproquement dans la formule

$$\frac{m(2A - s) + ns}{2A},$$

cette formule aurait servi à faire connaître la position de la ligne voisine de l'extrémité dont l'épaisseur est comme 1; elle serait devenue

$$\frac{2.245 - s + 2s}{2.245}.$$

On aurait donc eu la proportion

$$\frac{245}{4} : s :: \frac{2}{3} : \frac{490 + s}{2.245},$$

d'où résulte

$$3s = \frac{490 + s}{4}, \quad s = \frac{490}{11} = 0^{m},044 + \frac{6}{11}.$$

On peut voir, § 9, que la position des deux lignes nodales s'est trouvée exactement conforme à celles que les formules viennent de nous indiquer.

Observons qu'on peut employer, dans les expériences relatives aux simples lames, des pièces dont la longueur est plus grande que le côté des plaques qui rendent des sons perceptibles et que, par conséquent, le fait dont il s'agit est plus propre qu'aucun autre à mettre la théorie à l'épreuve. Le procédé qu'on vient d'employer est plus rigoureux que celui dont on a fait usage dans le paragraphe cité, aussi rend-il plus frappant l'accord de l'expérience.

Pour le second cas de vibration renfermé dans les formules

$$z = \cos\frac{p.\pi x}{A} \cos\frac{q.\pi y}{A},$$

$$z = \cos\frac{p.\pi s}{A'} \cos\frac{q.\pi y}{A'},$$

on a $p = 1$, $q = 2$; par conséquent, la figure nodale est composée d'une seule ligne parallèle à deux des côtés de la plaque et de deux autres lignes perpendiculaires à la première.

Sur la plaque d'épaisseur constante, la distance des lignes parallèles entre elles devant être double de celle qui sépare de l'extrémité voisine chacune de ces lignes, elles se forment à $0^m,025$ des mêmes extrémités, c'est-à-dire à $0^m,025$ et $0^m,075$ de celle des extrémités qui a été prise pour origine.

Les proportions

$$25 : s :: 3 : \frac{4(2.100 - s) + 2s}{200},$$

$$75 : s :: 3 : \frac{4(2.100 - s) + 2s}{200},$$

d'où l'on tire $3s = \frac{400 - s}{4}$, $s = \frac{400}{13} = 0^m,030 + \frac{10}{13}$ d'une part et $s = \frac{400 - s}{4}$, $s = \frac{400}{5} = 0^m,080$ de l'autre, nous apprennent que, sur la plaque W, les deux lignes nodales parallèles entre elles doivent se former aux distances de $0^m,030 + \frac{10}{13}$ et de $0^m,020$ des côtés voisins.

La position de la ligne perpendiculaire à celles-ci est la même que dans le premier cas de vibration; par conséquent, elle doit être placée, sur la plaque W, à $0^m,057 + \frac{1}{7}$ et $0^m,043 - \frac{1}{7}$ des côtés 4, 2 et 2, 1 de la même plaque.

Par un hasard heureux, cette figure, qui a présenté des distorsions considérables sur presque toutes mes plaques, a été moins irrégulière sur la plaque W. La ligne du milieu était fort peu oblique; la distance entre elle et le côté 4, 2 s'est trouvée de $0^m,058$ à l'extrémité et de $0^m,057$ dans les points intérieurs. La ligne perpendiculaire à celle-ci et voisine du côté 4, 2 n'était qu'à $0^m,028$, au lieu de $0^m,030 + \frac{10}{13}$; mais la distance entre la seconde ligne et le côté 2, 1 était très exactement de $0^m,020$.

L'inspection d'un grand nombre de figures nodales m'a porté à croire que, dans toutes les pièces fabriquées de la même manière, l'épaisseur ou l'élasticité naturelle était proportionnellement trop forte

vers les points du milieu. Pour expliquer cette dernière cause d'irrégularité, il suffirait de supposer que la main de l'ouvrier ait pesé plus fortement au centre que dans le voisinage des angles; au reste, sur les trois lignes dont se compose notre figure, une seule s'est écartée de la position que les formules lui assignent, et je puis assurer que, dans le nombre de mes plaques, plusieurs dont l'épaisseur était constante ont présenté des figures nodales moins conformes à la théorie.

Le troisième cas de vibration contenu dans les formules qui ont fourni les deux premiers exemples a lieu lorsqu'on prend à la fois $p = 2$, $q = 2$. La figure nodale correspondante est composée de quatre lignes nodales dont deux sont parallèles à chacun des côtés de la surface.

Sur la plaque d'épaisseur constante, ces lignes se coupent à $0^{m},025$ de chacun des angles, et leurs parties intérieures, en deçà des points d'intersection, forment les côtés d'un espace carré égal en étendue aux quatre espaces pareillement carrés situés aux angles de la plaque.

La disposition des mêmes lignes sur la plaque W est déterminée d'avance par les formules relatives au second cas de vibration que nous venons d'examiner. En effet, la seule différence qui ait lieu entre les figures nodales correspondant aux valeurs $p = 1, q = 2$ et $p = 2, q = 2$ est que la ligne perpendiculaire, dans le premier cas de vibration, aux lignes parallèles entre elles, situées aux distances de $0^{m},030 + \frac{10}{13}$ et de $0^{m},020$ des côtés voisins de chacune des mêmes lignes, est remplacée, dans le second cas, par deux autres lignes semblables aux premières et également distantes des côtés voisins de $0^{m},030 + \frac{10}{13}$ et de $0^{m},020$.

La figure se trouve ainsi composée de deux espaces carrés situés aux angles 4 et 2 et dont les côtés sont de $0^{m},030 + \frac{10}{13}$ et de $0^{m},020$: tandis que deux parallélogrammes de $0^{m},030 + \frac{10}{30}$ sur $0^{m},020$ occupent, sur la même surface, les espaces compris entre les deux angles 2 et le point d'intersection des deux lignes nodales qui se terminent de part et d'autre des mêmes angles.

Afin de donner un exemple de l'emploi des formules qui appartiennent spécialement aux surfaces, nous allons chercher directement la position, sur la plaque W, du point d'intersection des deux lignes nodales situées de part et d'autre de l'angle 4.

La première des formules (B) donne l'épaisseur moyenne de l'espace carré qui a un de ses angles commun avec l'angle m de la surface. Quelles que soient les valeurs particulières des épaisseurs m, n, m', n' et e, on parviendra donc à connaître la valeur t du côté de la petite surface carrée, et par conséquent aussi la position de celui des angles de cette surface qui est opposé à l'angle m, en faisant usage de la proportion suivante :

$$x^2 : t^2 :: e^2 : \frac{4mA^2 - 4mAt + 2At(m'+n) + (m-n-m'+n')t^2}{4A^2}.$$

Nous avons ici $x^2 = (25)^2 e = \frac{9}{4}$:

$$\frac{4mA^2 - 4mAt + 2At(m'+n) + (m-n-m'+n')t^2}{4A^2}$$
$$= \frac{4.4(100)^2 - 4.4.100t + 2.100t.4 + t^2}{4(100)^2} = \frac{16(100)^2 - 8.100t + t^2}{4(100)^2}.$$

La proportion devient

$$(25)^2 : t^2 :: \frac{9}{4} : \frac{(400-t)^2}{4(100)^2};$$

elle donne

$$9t^2 = \frac{(400-t)^2}{4^2},$$

d'où l'on tire

$$13t = 400, \quad t = 30 + \frac{10}{13}.$$

Cette valeur de t est celle que nous avons trouvée, dans le second exemple, en nous servant des simples formules linéaires; elle mène, par conséquent, à conclure que le point de rencontre des lignes nodales situées de part et d'autre de l'angle 4 est en effet placé à $0^m,030 + \frac{10}{13}$ des côtés auxquels elles se terminent.

Il est évident que ce résultat suppose la parfaite régularité de la pièce; car, si l'épaisseur moyenne de la petite surface carrée dont le côté est t se trouvait plus ou moins grande que la quantité $\frac{400-t}{200}$, les

figures nodales cesseraient de se rencontrer dans le point que nous venons de fixer, et il y aurait distorsion dans la figure nodale.

En général, si l'imperfection de la plaque se trouve dans le voisinage des points qui devraient appartenir aux lignes de repos, il ne peut manquer d'exister de l'irrégularité dans la figure nodale; si le défaut correspond à un point assez éloigné pour que ce défaut puisse être compensé par un autre égal dans un point placé en sens inverse par rapport à la ligne nodale, le défaut supposé ne nuira pas toujours à la régularité de la figure.

Cette remarque explique comment il a pu arriver que des pièces où de certaines figures étaient à peu près régulières ont pourtant montré, dans d'autres cas de vibration, de fortes distorsions; pourquoi l'irrégularité n'existait pas sur toutes les plaques dans les figures analogues; et comment les distorsions se sont multipliées en raison de l'augmentation du nombre des lignes de repos.

La figure qui est l'objet de notre troisième exemple n'a été régulière sur aucune des dix pièces; mais la plaque W a montré des distorsions moins grandes que celles qui ont été observées sur plusieurs des plaques d'épaisseur constante.

Les lignes qui devaient se croiser dans le voisinage de l'angle *t* s'écartaient au contraire l'une de l'autre; mais elles se terminaient, comme la théorie l'exige, à $0^{m},020$ de part et d'autre du même angle. Les côtés des deux parallélogrammes situés aux deux angles 2 devaient être de $0^{m},030+\frac{10}{13}$ et de $0^{m},020$; ils se sont trouvés l'un de $0^{m},029$ et de $0^{m},020$, l'autre de $0^{m},028$ et de $0^{m},021$.

Enfin le côté du carré voisin de l'angle 4 devait être de $0^{m},030+\frac{10}{13}$. Vers le point où devait exister l'angle commun au carré dont nous parlons et au parallélogramme intérieur, la figure a montré une distorsion considérable : le parallélogramme s'est terminé par un angle arrondi; au delà de cet angle les points de repos ont disparu, et les lignes qui devaient se terminer de part et d'autre de l'angle 4, aux côtés 4, 2, ont été remplacés par une ligne courbe, qui a atteint les mêmes côtés à $0^{m},028$ de l'angle 4.

La même figure, observée sur une autre pièce qui devait être semblable à la plaque W, était tellement contournée, qu'il était difficile de

la reconnaître. Les plaques d'épaisseur constante m'ont fourni l'occasion d'observer des changements entièrement analogues : l'une d'entre elles a montré la singulière distorsion dont je viens de parler avec les seules différences que la théorie aurait pu prévoir.

J'ai constamment remarqué que, lorsqu'une simple ligne courbe remplaçait les deux lignes nodales qui devaient se terminer de part et d'autre d'un des angles de la surface, l'intervalle entre les extrémités de la ligne courbe et l'angle dont il s'agit était plus petit que lorsque la figure était régulière. Ainsi, dans le cas de vibration qui nous occupe, quand sur les plaques d'épaisseur constante on a observé une semblable irrégularité, la ligne courbe était terminée à $0^{m},022$, tandis que les lignes droites montraient l'intervalle de $0^{m},025$ exigé par la théorie. Or la différence de $0^{m},022$ à $0^{m},025$ est égale à celle de $0^{m},028$ à $0^{m},030 + \frac{13}{10}$ que nous avons notée par rapport à la plaque W.

Les exemples qui ont été choisis appartiennent tous au cas où l'épaisseur varie à la fois suivant deux directions; chacun d'eux renferme donc une épreuve double.

A l'égard des expériences faites sur les surfaces où l'épaisseur varie suivant une seule direction, des faits analogues ayant été mentionnés par rapport au cas linéaire, je me contenterai d'ajouter que les observations faites en dernier lieu ont été également favorables à la théorie.

Malgré les irrégularités et les distorsions dont j'ai fait mention, nous conclurons que la dernière des conditions relatives à la vérification de la théorie n'est pas moins remplie que les précédentes, c'est-à-dire que les différences entre les figures nodales observées comparativement sur les plaques d'épaisseur constante et sur les plaques d'épaisseur variable peuvent servir à faire reconnaître l'égale compensation qui s'établit, pendant le mouvement, entre les épaisseurs moyennes des différentes parties de la plaque d'épaisseur variable et l'étendue des mêmes parties.

Le choix du coefficient, déjà justifié par les faits relatifs aux surfaces d'épaisseur constante, se trouve donc encore appuyé par l'existence même des phénomènes qui appartiennent aux surfaces planes d'épaisseur variable; et l'observation des circonstances qui accompagnent les mêmes phénomènes prouve l'exactitude des mesures qu'en donne la théorie.

La doctrine que je soumets au jugement de l'Académie semble devoir se prêter à plusieurs applications importantes. En expliquant l'influence propre de l'épaisseur sur les faits des surfaces élastiques, elle permet d'apprécier séparément les changements dus, et aux différences relatives à cette dimension, et aux différences qui appartiennent spécialement à l'élasticité naturelle. Sous ce rapport elle ne sera peut-être pas moins utile à l'art des constructions qu'à celui de la fabrication des instruments.

La détermination des circonstances du mouvement des plaques d'épaisseur variable, assimilées aux plaques fictives d'épaisseur constante, montre que les valeurs de l'ordonnée z, et par conséquent aussi celle de la flèche dans les plans élastiques, dépend des épaisseurs moyennes des parties comprises entre les points d'appui et celui qu'on veut considérer. Sans vouloir entrer dans une théorie qui n'est pas de mon ressort, je ferai cependant observer qu'une conséquence des effets produits par les épaisseurs moyennes serait la possibilité, en établissant un surcroît d'épaisseur dans une partie seulement d'un plan élastique, d'augmenter, par rapport à tous les points qui composent ce plan, la résistance dont il est susceptible. Les formules feraient connaître alors, pour tous les points qui appartiennent à ce plan, la quantité de cette augmentation. Le savant auteur qui a consacré ses recherches aux questions de ce genre appréciera, mieux que je ne pourrais le faire, la justesse plus ou moins grande de cette observation.

Dans l'emploi des lames et des plaques élastiques envisagées comme corps sonores, on sera désormais en état de prévoir les différences que devront amener les changements d'épaisseur.

Deux surfaces élastiques où la longueur des côtés et les épaisseurs sont proportionnelles donnent, il est vrai, les mêmes tons; mais la qualité du son peut y être fort différente. Toutes conditions égales d'ailleurs, les sons seront d'autant plus beaux que les pièces auront à la fois plus d'étendue et plus d'épaisseur. Si on se rappelle qu'il existe nécessairement des lignes de limite sur tous ces corps sonores, on concevra la possibilité d'obtenir de la lame d'épaisseur variable un son plus plein que lorsque l'épaisseur de cette lame est constante. La qualité du son serait alors déterminée par la partie de la lame prise du côté où l'épaisseur moyenne se montrerait la plus grande; cette partie se trou-

verait comprise entre l'extrémité et la ligne de limite la plus voisine. Le son, beaucoup plus faible, de la partie restante ne pourrait avoir d'autre effet que de renforcer le premier.

La doctrine des épaisseurs moyennes explique au moins comment il est possible d'obtenir des sons purs dans les cas où les figures nodales accusent des inégalités d'épaisseur entre les différents points du corps sonore.

A la vérité, toute cette théorie n'est démontrée que par rapport aux suppositions qui servent de fondement à nos formules ; mais néanmoins la similitude des sons, qui ne cesse pas de se manifester malgré le défaut des pièces, donne lieu de penser que les compensations que nous avons établies sont indépendantes de la loi de distribution qui nous a servi à les reconnaître.

NOTE A.

(*Voir* p. S. 34.)

Sophie Germain fait ici allusion à une Lettre dans laquelle elle avait exposé ses observations relatives aux expériences de M. Wheatstone, en les comparant aux expériences de Chladni. Cette Lettre avait été lue à l'Académie des Sciences dans la séance du 1er septembre 1823. Le procès-verbal en fait la mention suivante :

« On donne lecture d'une Lettre de Mlle Sophie Germain, concernant les expériences de M. Wheatstone sur les vibrations des plaques métalliques.

» MM. Fourier et Arago prendront une connaissance spéciale de l'objet de cette Lettre et en rendront compte à l'Académie. »

La Lettre de Sophie Germain n'est pas aux Archives de l'Institut. Il est vraisemblable qu'elle a été adressée à Fourier; après la lecture, elle a dû être remise à Arago, qui l'aura gardée.

Quoi qu'il en soit, nous la reproduisons ici d'après la minute qui se trouve à la bibliothèque du British Museum, à Londres (Imprimés, Press mark 8534, *ee*) :

[1823].

MONSIEUR,

Je vous prierai, si vous le jugez convenable, de communiquer à l'Académie les observations suivantes : elles sont relatives aux expériences de M. Wheatstone, dont M. Arago a rendu compte dans la dernière séance de juin et dont je lis pour la première fois l'exposé dans le numéro des *Annales de Chimie* qui vient de paraître (1). L'article le plus important concerne ce que le savant

(1) *Nouvelles expériences sur le son*, par M. Wheatstone, p. 313 du Tome XXIII (2e série, 1823) des *Annales de Chimie et de Physique*, par MM. Gay-Lussac et Arago.

anglais nomme *vibrations moléculaires des corps*. Les expériences par lesquelles il est parvenu à rendre ces petits mouvements sensibles sont sans doute fort ingénieuses; cependant je vois avec étonnement que les physiciens semblent croire qu'elles révèlent, dans les vibrations sonores, quelques nouvelles propriétés qui n'auraient pu être reconnues par les moyens qu'a employés M. Chladni.

Je crois pouvoir affirmer que non seulement les expériences de cet habile physicien, lorsqu'elles sont faites avec soin, indiquent les principaux faits observés par M. Wheatstone, mais encore que les formules à l'aide desquelles j'ai expliqué la correspondance entre les sons et les figures nodales renferment également l'explication des expériences nouvelles.

L'existence des centres de vibration, l'augmentation de leur nombre et en même temps la diminution de leur amplitude lorsque la pièce, qui rendait d'abord un son donné, fait entendre un son plus aigu, se manifestent dans les expériences de M. Chladni par le mouvement de la poussière dont il recouvre les plaques vibrantes. Avant que cette poussière se soit accumulée sur les lignes de repos, elle est souvent lancée à une distance sensible de la surface. Ce phénomène a lieu dans les points où M. Wheatstone reconnaît l'existence des centres de vibration. J'avais employé depuis longtemps, comme l'a fait M. OErsted, la poussière de lycopode au lieu du sablon dont je me sers plus ordinairement; j'avais également remarqué la tuméfaction de cette poussière, et j'avais vu en même temps que les points où elle est fort apparente sont ceux qui, suivant la théorie, doivent s'éloigner beaucoup, durant le mouvement de la surface, de leur situation initiale.

Les expériences de M. Wheatstone sont plus délicates, et elles ont l'avantage de rendre sensibles des différences fort petites. Je me suis empressée de les répéter; seulement j'ai substitué à l'eau dont ce physicien recouvre les surfaces vibrantes l'eau-de-vie, qui, à cause de sa moindre pesanteur spécifique, se prête plus facilement encore aux mouvements que lui communiquent les différents points des surfaces sur lesquelles elle s'appuie. Toutes les expériences du même genre présentent des phénomènes analogues; je me bornerai donc à décrire et à expliquer une seule d'entre elles.

Si l'on couvre d'eau-de-vie une plaque carrée et qu'on en tire le son correspondant à la formation de deux lignes nodales perpendiculaires entre elles et parallèles aux côtés, le liquide présente aux quatre angles la surface réticulée qu'a observée M. Wheatstone; en même temps, dans les points sensiblement éloignés des angles et suivant la direction des côtés, le même liquide ne présente plus qu'une surface côtelée, comparable à un ruban à graine; les petites proéminences sont perpendiculaires au côté; elles vont en diminuant

d'élévation jusqu'aux points sur lesquels se formeraient les lignes nodales si la plaque était recouverte de poussière.

Lorsqu'on tire ensuite de la même plaque le son correspondant à la formation de quatre lignes nodales dont deux seraient parallèles à chacun des côtés, l'apparence réticulée se manifeste non plus seulement aux quatre angles de la surface, mais encore dans quatre espaces semi-circulaires situés au milieu de chacun des côtés et aussi dans un espace circulaire placé au centre de la plaque. La figure que présente alors le liquide est formée, comme dans le cas des figures nodales, de la réunion de quatre figures semblables à celle qui s'est montrée, sur la même plaque, dans la première partie de l'expérience. Ainsi, conformément à l'observation faite par M. Wheatstone à l'occasion d'une expérience analogue à celle que je viens de rapporter, la surface réticulée angulaire occupe un espace quatre fois moindre que quand la plaque rendait un son plus grave.

Pour parvenir à expliquer les faits précédents, je serai forcée d'avoir recours à l'emploi des formules. Celle qui appartient au cas présent se réduit, en supprimant le facteur, inutile ici, à

$$z = \mathcal{A} \sin\left(\frac{\pi m x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{A}\right).$$

π représente la demi-circonférence, m le nombre des lignes nodales parallèles à chacun des côtés, A la longueur des mêmes côtés, x et y les deux coordonnées horizontales dont l'origine est à un des angles de la surface, et $\mathcal{A}$ une constante arbitraire.

Dans la première partie de l'expérience, on a $m = 1$, $z = \mathcal{A} \sin \frac{\pi x}{A} \sin \frac{\pi y}{A}$. Les plus grandes valeurs de l'ordonnée z, ou, ce qui est la même chose, la plus grande étendue du mouvement vibratoire a donc lieu aux quatre angles de la plaque, pour lesquels les valeurs $x = 0, y = 0$; $x = 0, y = A$; $x = A, y = 0$ et $x = A, y = A$, correspondant à chacun de ces points, donnent également $\cos \frac{\pi x}{A} \cos \frac{\pi y}{A} = 1$. A partir de ces points, les valeurs de $\cos \frac{\pi x}{A}$ et celles de $\cos \frac{\pi y}{A}$ diminuent, et le croisement de ces différentes valeurs donne lieu à l'apparence réticulée du liquide. A une distance sensible des angles, lieu où ne se prolonge pas le double mouvement, et en suivant la direction d'un des côtés de la plaque, les valeurs de l'ordonnée z ne varient plus qu'à raison des changements de valeur d'une seule des ordonnées x et y, car l'une d'elles demeure constante pour tous les points situés dans une ligne parallèle aux

côtés; de là l'apparence côtelée qu'affecte le liquide. Enfin ces petites ondes s'abaissent à mesure qu'elles approchent du lieu qu'occuperaient les lignes nodales, et la théorie indique, en effet, qu'elles doivent alors disparaître entièrement.

Ce premier point éclairci, on verra aisément ce qui doit arriver dans la seconde partie de l'expérience, c'est-à-dire quand on a

$$z = \mathcal{A} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \frac{2\pi y}{\lambda}.$$

J'ai prouvé ailleurs (dans le premier Mémoire présenté à l'Académie) (1) qu'il existe alors sur la plaque carrée deux lignes de limite analytiques qui se croisent au centre de cette surface et que, si la même surface était réellement séparée, par des sections opérées suivant les lignes de limite, en quatre plaques carrées plus petites, chacune d'elles continuerait à rendre le même son et à présenter la même figure nodale que lorsqu'elle faisait partie de la plaque entière. Il résulte de là qu'au centre de cette plaque la réunion de quatre centres angulaires de vibration doit donner lieu à la formation de la surface circulaire réticulée qu'on y observe, et qu'au milieu de chacun des côtés de la surface, la réunion de deux centres angulaires de vibration doit présenter, comme elle le présente en effet, un espace semi-circulaire réticulé.

Ce qui me semble le plus curieux dans les expériences de M. Wheatstone est qu'elles peuvent servir à déterminer quelle est la fraction de λ, c'est-à-dire de la longueur du côté de la plaque, dont le plus ou le moins influe d'une manière sensible sur la grandeur de l'ordonnée z. Cette fraction représente une quantité d'autant plus petite que l'entier λ est lui-même plus petit.

Suivant la manière dont s'exprime le physicien anglais, lorqu'il a réduit la plaque rectangulaire à la moitié de sa longueur, quatre *corpuscules vibrants* occupaient l'espace, qui, sur la plaque entière, était recouvert par un seul. Les cas de vibration que j'ai choisis pour exemple ont l'avantage de montrer la

---

(1) Mémoire sur cette question, proposée par la première Classe de l'Institut (Concours de 1811) :

Donner la théorie mathématique des vibrations des surfaces élastiques, et la comparer à l'expérience.

Ce Mémoire, reçu au secrétariat de l'Institut le 21 septembre 1811, porte pour épigraphe : *Effectuum naturalium ejusdem generis eædem sunt causæ.* (NEWTON, *Philos. nat. princ. mathem. Regula philosophandi*, regula II).

Il a été le seul présenté à ce Concours.

raison de cette différence, car dans le premier la surface vibrante est composée d'éléments qui dans le second se montrent quatre fois sur la même surface.

Il résulte des remarques précédentes, auxquelles on pourrait ajouter beaucoup d'autres, que les expériences de M. Wheatstone doivent être considérées comme une contre-épreuve de celles de M. Chladni. De part et d'autre on parvient à distinguer sur les surfaces vibrantes les points où s'exécutent les mouvements les plus étendus et ceux où le repos est absolu; mais, tandis que les premières portent particulièrement l'attention sur les points qui, durant le mouvement général, s'écartent davantage de leur situation naturelle, les secondes, au contraire, fixent surtout les yeux sur les points qui, durant le même mouvement, conservent leur position initiale.

J'ose espérer que l'Académie accueillera favorablement les explications dans lesquelles je viens d'entrer, et qui tiennent de bien près à celles qui ont déjà obtenu son approbation (1).

---

(1) Ce document a passé dans une des ventes faites par Libri à Londres.

Dans le *Catalogue of the mathematical, historical, bibliographical and miscellaneous portion of the celebrated Library of M. Guglielmo Libri* (London, 2 parties gr. in-8°, 1861) on lit : « N° 3345. GERMAIN (Mlle SOPHIE), *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et équation générale de ces surfaces*. Paris, 1826; in-4° : « An important work by this celebrated lady-mathe-» matician, who was crowned by the Institut in 1815 for successfully answering a » question on vibrations, which had been thrice proposed for competition without » obtaining a reply. This copy belonged to the authoress herself, and besides her nu-» merous manuscript additions, contains the draft of a long scientific Letter respecting » M. Wheatstone's experiments on vibrations, entirely in her *autograph*. »

Ce n° 3345 est aujourd'hui au British Museum. A la suite d'un exemplaire des *Remarques*, sur les marges duquel Sophie Germain a écrit des additions, se trouvent, reliés sous la même couverture, d'abord la minute de la Lettre ci-dessus reproduite (6 pages in-4°), puis sept feuillets de notes manuscrites, dont les unes sont des brouillons relatifs à des passages du Mémoire et de la Lettre présentement publiés, et les autres concernent la courbure des surfaces.

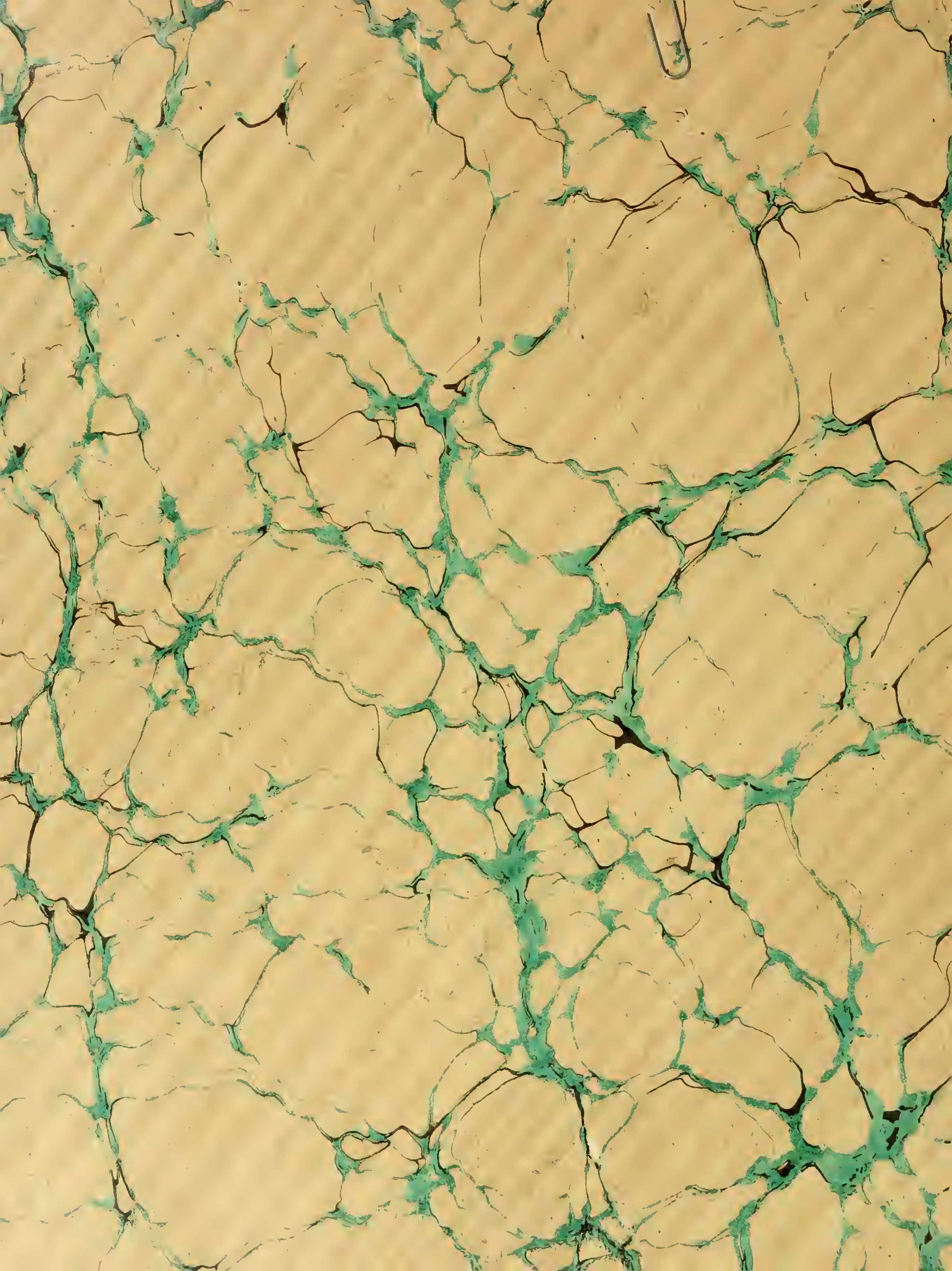
TABLE DES MATIÈRES

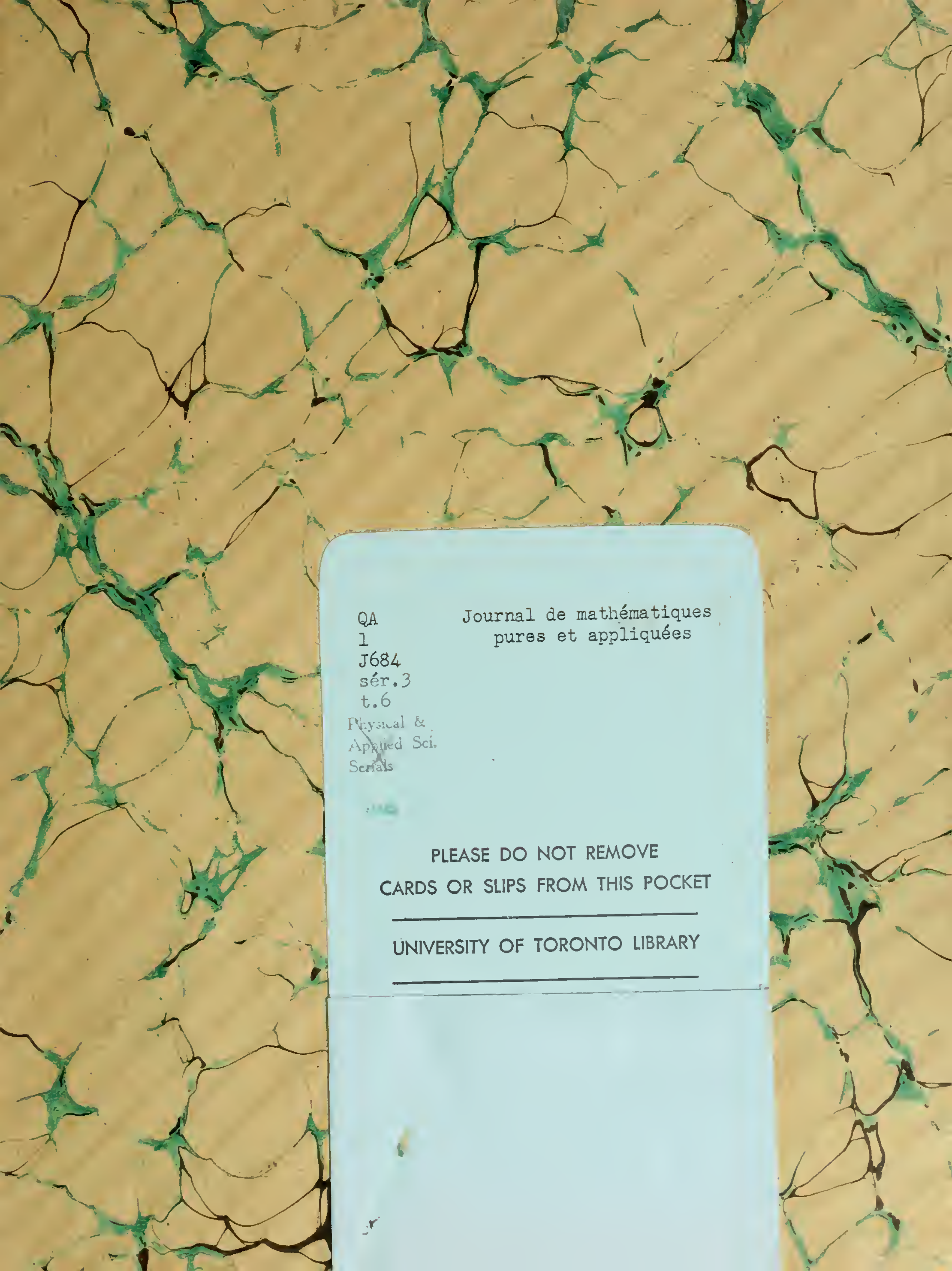
TROISIÈME SÉRIE. — TOME VI.

SUPPLÉMENT.

FIN DU TOME VI DE LA TROISIÈME SÉRIE.

5859 Paris — Imp. Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.




QA
1
J684
sér.3
t.6
Physical &
Applied Sci.
Serials
Journal de mathématiques
pures et appliquées
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

